当代学术棱镜译丛

/世/纪/学/术/论/争/系/列/

丛书主编　张一兵　副主编　周　宪　任天石



"索卡尔事件"与科学大战

——后现代视野中的科学与人文的冲突

原著＝索卡尔　德里达　罗　蒂　等

译者＝蔡　仲　邢冬梅　等

责任编辑 [illegible]
装帧设计 [illegible]
责任校对 [illegible]

1996年5月，“索卡尔事件”出现后，在全球学术界爆发了一场科学家与后现代哲学家之间的大论战。这场论战涉及到对科学本性、科学真理的客观性和理性、科学方法、科学、技术与政治、军事、经济等社会因素的关系等等的辩论。众多的科学家，如物理学家、数学家、生物学家、化学家等纷纷投入保卫科学、保卫理性的斗争之中，而后现代哲学家、文学家、历史学家、社会学家等却不断地借助于“外部因素”来“解构”科学，“解构”理性。在一定意义上说，这是一场科学与“反科学”的论战，是一场真正的科学与人文的大冲突。在人类历史上，还没有出现过如此深刻的、影响面如此广泛的论战，它必将会对人类的文化与社会产生深远的影响。

本文收集了有关这场论战主要论文，作者大都是这场论战的主角，论文也主要是由作者自己推荐的。本文集的目的是把这场论战的主要内容介绍给我国学术界，以促进我国的文化事业的发展。



ISBN 7-305-03775-3/C·108
定价：22.00元

分形理论与分形的计算机模拟

（修订版）

曾文曲　王向阳
孙　炜　刘　丹　王福龙　编著

东北大学出版社

内容提要

这是一本分形理论与计算机科学相结合的专著，它既有深刻的理论背景，又有较强的应用性。书中在近年来分形几何理论在国内逐步推广的形势下，重点介绍了分形几何的最新理论是如何应用到分形图像的计算机模拟上的。利用分形的性质，分析绘制分形图的各种算法的理论根据和程序的编制原理。编著者还根据几年来的工作，参考最新的文献，介绍了一系列行之有效的绘制分形的基本算法和程序，只要有初步计算机知识的读者，都可以利用本书提供的算法与程序，直接上机模拟各种美丽的分形图像。

本书可供高年级大学生、研究生、大学教师和其他科学工作者采用。它特别适合计算机工作者参考。有一定计算机理论水平的人，可以利用本书介绍的基本原理和分形理论，去研究更有效的计算机算法，开发新的软件；同时可以进一步的考虑，如何用更少的机储，去储存复杂的信号与图像，达到信息压缩的目的。

图书在版编目(CIP)数据

分形理论与分形的计算机模拟(修订版)/曾文曲等编著．—2版．沈阳：东北大学出版社，2001.7

ISBN 7-81054-648-1

Ⅰ．分…　Ⅱ．曾…　Ⅲ．①分形理论 ②分形学-计算机模拟　Ⅳ．O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第051935号

(沈阳市和平区文化路3号巷11号　邮政编码 110006)

电话：(024)23890881　传真：(024)23892538

网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

沈阳农业大学印刷厂印刷　东北大学出版社发行

开本：850mm×1168mm　1/32　字数：188千字　印张：7.25

印数：5000～8000册

2001年7月第2版　2001年7月第2次印刷

责任编辑：冯淑琴　责任校对：闻国琴

封面设计：唐敏智　责任出版：秦　力

定价：15.00元

前　　言

我们面临的世界是多么丰富多彩，天空中飘浮着变幻莫测的云彩，地球表面雄浑壮阔的地貌，海洋上风起云涌时的滔天巨浪，以及各种犬牙交错的边界线。对那么多奇形怪状的图形，多少年来，人们习惯于用传统的几何方法对它们进行描述，采用的主要手段是用直线段或圆弧对它们进行逼近，这种描述应该说与现实是有相当大的差距的。

从 1975 年以来，随着著名数学家 B.B.Mandelbrot 几本专著的出版，一种新型的几何语言诞生了，这就是分形几何。分形几何的出现可以看成是数学史上的一次重大变革，它可以用来有效的描述自然界中及科学研究中遇到的各种各样复杂的图形。一旦你掌握了分形几何这种语言，你就有了处理分析和绘制各种不规则图形的强有力的手段。

分形几何，这门新的数学分支一创立，就日益受到各国学者的重视，在过去十几年里，分形科学已有了很大的发展。她在纯数学、物理学、材料科学、地质勘探、疾病诊断、股价预测以及计算机和信息科学等许多领域中，都得到了广泛的应用。并且由于分形几何方法的引入，使一些原已死寂一般的老的学科方向焕发了新的生机，也使一些正蓬勃发展的新学科获得了巨大的推动力。分形几何与计算机科学的结合就是一个明显的例证。一方面，分形理论推动了计算机绘图方法的迅速发展，使计算机在信息压缩及模仿自然现象中的各种奇妙图形发挥了重要的作用；另一方面，计算机的应用也大大地推动了分形理论的发展，并且由于模拟分形图成功而展现出优美的分形图像，迅速提高了分形这门新兴科学的声望，扩大了她的影响。目前，用计算机绘制分形图像是如此之流行，以致不仅使绘制分形的算法理论及程序设计已成为一独立的研究方向，同时绘制的分形图也

已成了一种相当时髦的艺术形式。

近年来，国外相继出版了不少有关分形科学的专著，国内也有了几本这方面的译著和专著出版。这对推动分形理论与方法的普及与发展起了很好的作用。这些书中，像 Falconer. K. J 的参考文献[4]，[7]在理论上是比较深刻的，书中包括严格的数学处理和在各个学科方向上的应用原理。这类书无疑是对分形的数学机理的完整的描述，但对如何把分形的数学理论应用于分形图的计算机模拟则基本不涉及。另一类目前比较流行的书籍可以说是以 Heinz-Otto 等主编的参考文献[1]为代表的，它主要从计算机绘图的观点来讨论分形，介绍基本的算法，叙述绘制和模拟分形图的基本方法与程序，并且给出了各种类型的优美而壮观的分形图像，这些图像能给读者留下深刻的印象。但是，对基本算法和程序与分形性质的联系，以及相应的理论根据介绍得不够充分，对读者进一步研究新的算法是不利的。

本书试图综合上面两类书的特点，结合几年来我们在教学和研究分形理论与利用计算机绘制分形图的经验，介绍分形最新理论是如何应用到计算机绘图上的，讲清绘制分形图的各种算法的理论根据和程序的编制原理，其中包括作者研究开发出来的有效的算法和省机时的软件。有助于读者进一步研究新算法，为绘制更高级更复杂的分形图创造条件。

我们编著本书的目的，是奉献给读者一本既有深刻的理论背景，又有较强的应用性的分形理论与计算机科学相结合的专著。

全书分成两部分，前 4 章为理论部分，第 5 章和第 6 章为算法理论与程序编制部分。重点介绍了绘制分形图像的几种算法，主要有字符串替换算法、确定性算法、随机迭代算法、逃逸时间算法、以及反函数迭代算法等。这些算法都是当前比较流行而且有效的计算机算法。同时我们对其中的一些关键步骤进行了改进，收到既省时又加快计算速度的良好效果。

分形理论发展极其迅速，新成果层出不穷，用计算机绘制分形的理论与算法也日新月异，但愿这本书能为提高和普及这方面的知识

发挥一些作用。由于我们水平有限，书中难免存在缺点和不当之处，敬请读者批评指正。

本书由五人集体讨论定稿，具体由曾文曲和王向阳执笔，第 5 章的程序全都运行无误，并实际打印出第 5 章的全部图像。高占阳同志参加本书部分章节的讨论，并提出了许多宝贵建议，在此向他表示诚挚的感谢。

本书由国家自然科学基金资助。

最后，我们感谢东北大学出版社对本书的出版给予的大力支持。

作　者

1992 年 12 月 5 日

书中应用的主要数学符号

$\emptyset$:空集。

$\exists$:存在。

$\in$:属于。

$\forall$:任意。

$\Rightarrow$:导致,蕴含

$\subset$:包含于

$\bigcup$:并。

$\bigcap$:交。

$\simeq$:近似相等。

$\approx$:同阶($f(x) \approx g(x)$,即存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使 $c_1 g(x) \leqslant f(x) \leqslant c_2 g(x)$。

$B(x, \epsilon)$:以 x 为中心,以 ϵ 为半径的球。

$f \wedge g$:$\inf(f, g)$。

$f \vee g$:$\sup(f, g)$。

f^+:$f \vee 0$。

$f^-$$(-f) \vee 0$。

R^d:d 维实数集。

C:复平面;$\hat{C} = C \cup \{\infty\}$

Z^d:d 维格子点。

$\# F$:集 F 中元素的总个数。

目　录

1　分形与分形维数

为掌握计算机绘制分形的算法理论和制图技巧，首先需了解分形几何的一些最主要的概念及性质。本章从介绍分形的最基本定义入手，为后几章算法理论的导出和绘制方法的引入做一些必要的准备。有些是首次见书的，如关于离散豪斯道夫维数；也有一些是从新角度进行了阐述。

如果说，欧氏几何是研究规则图形的几何学，那么，分形几何则是研究“不规则”图形的几何学。这里的“规则”本质上指的是逐段可微或者更确切地说，是逐段光滑的图形。而所谓“不规则”图形应当是满足某些“新规则”的图形，这种“新规则”是什么呢？首先把这个问题说清楚。

1.1　分形的定义

分形几何是一门几何学，它研究的对象是欧氏空间的一类子集，这类子集结构较复杂。按一般方法，似乎应首先给分形下一个明确定义，对给定的图形，再根据它是否满足给出的定义，来判断它是不是分形。但经验已证明，这样的方法对分形几何这一新兴的数学分支有失之简单化的倾向。正像分形几何的创始人 B.B.Mandelbrot 本人开始时给分形几何下过两个定义，但经过理论与应用的检验，人们也发现这种简单的定义确难包括分形如此丰富的内容，因此这两个定义也逐渐的不被人们提及了。那么究竟什么是分形呢？它们所遵循的“不规则”的规则又是什么，我们采用的是一种与传统方法不同的方法。

原则地说：分形是一些简单空间上，如 R^d, C, $\hat{C}$ 上的一些“复杂”的点的集合，这种集合具有某些特殊性质，首先它是所在空间的

紧子集，并且具有下面列出的典型的几何性质

（ⅰ）分形集都具有任意小尺度下的比例细节，或者说它具有精细的结构。

（ⅱ）分形集不能用传统的几何语言来描述，它既不是满足某些条件的点的轨迹，也不是某些简单方程的解集。

（ⅲ）分形集具有某种自相似的形式，可能是近似的自相似或者统计的自相似。

（ⅳ）一般，按本章中的方式定义的分形集的“分形维数”，严格大于它相应的拓扑维数。

（ⅴ）在大多数令人感兴趣的情形下，分形集由非常简单的方法定义，可能以变换的迭代产生。

对于各种不同的分形，有的可能同时具有上述的全部性质，有的可能只有（ⅰ）—（ⅴ）中的大部分性质，而对某个性质有例外，但这并不影响我们把这个集合称为分形。应当指出，自然界和各门应用科学中涉及的分形绝大部分都是近似的。当尺度缩小到分子的尺寸，分形性也就消失了，严格的分形只存在于理论研究之中。

下面我们观察几个分形的例子。

例 1.1.1 广义 von Koch 曲线，见图 1.1.1 和图 1.1.2。图 1.1.1 中的(a)，(b)，(c)，(d)分别是四个广义的 von Koch 曲线的生

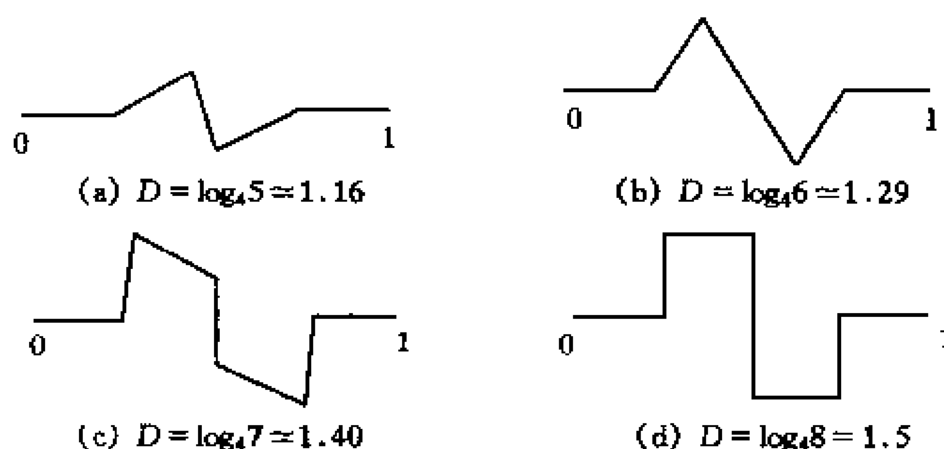


图 1.1.1 (a)，(b)，(c)，(c)四个图分别表示 4 种广义 von Koch 曲线的生成元

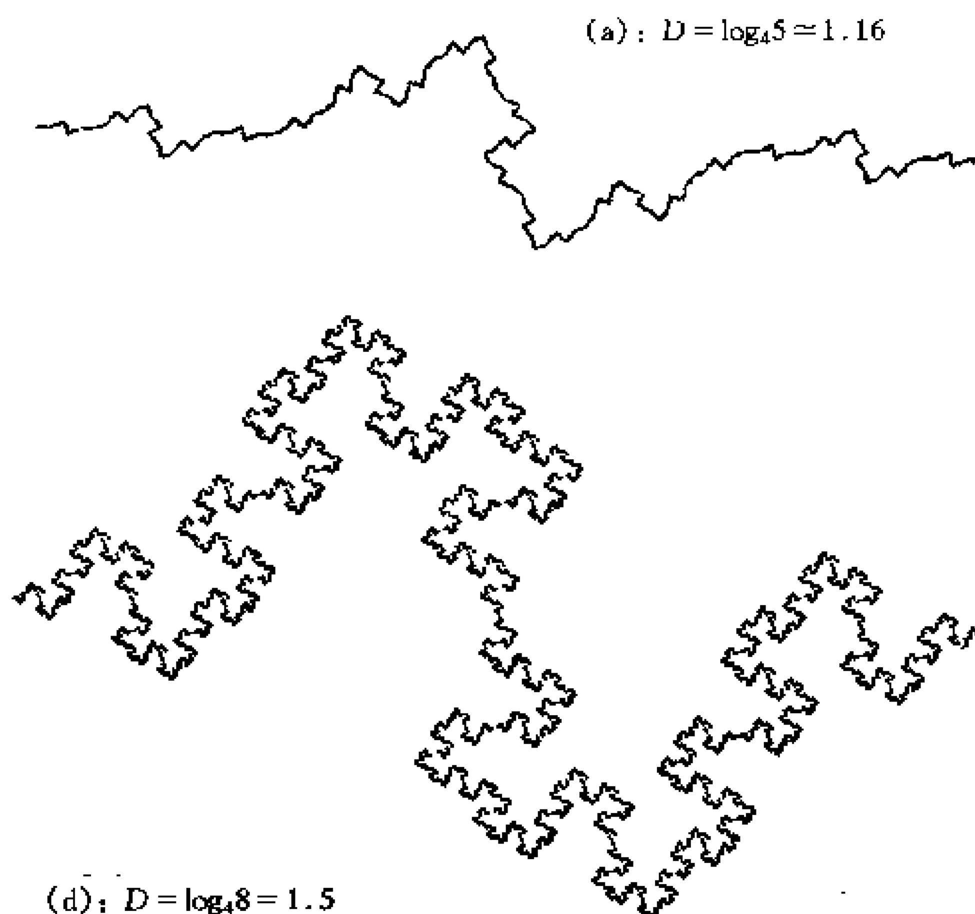


图 1.1.2 由图 1.1.1 中的生成元(a)和(d)生成的广义 von Koch 曲线

成元，如果迭代都从 E_0，即长度为 1 的单位直线段开始，第一步迭代成为 E_1，就是所谓的生成元。下一步迭代则是将各个 E_1 中的长度为 1/4 的小直线段，分别用缩小比例到原来的 1/4 的生成元取代而得到 E_2。依此类推，当 k 充分大时，E_k 与 E_{k-1} 只在精细的细节上不同。图 1.1.2 给出了(a)，(d)在 k 充分大时 E_k 的图形，它们可以作为 $k\to\infty$ 时，分形集下的近似图。这种分形集 F 显然满足性质(ⅰ)—(ⅴ)。这么复杂的曲线，却源出于一个简单的生成元，并且它最显著的特征是它的严格自相似性——图 1.1.2 中的两个图的任一小段放大适当的倍数，则可以与原图的某一大段完全重合。

例 1.1.2 图1.1.3表示的是在本书第4章将详细讨论的复变函数迭代产生的 Julia 集，这也是一种分形集。并且显然比广义 von Koch 曲线更错综复杂，它是单个复变量函数 $f(z)=z^2-\lambda$ 迭代出

来的图像。从图上可以看到 Julia 集具有精细结构，但没有如广义 von Koch 曲线那样严格的自相似性，它具有“拟自相似性”，即这个集的任意小部分可以放大，然后平滑地变形使之与这个集合的某一较大部分相一致。

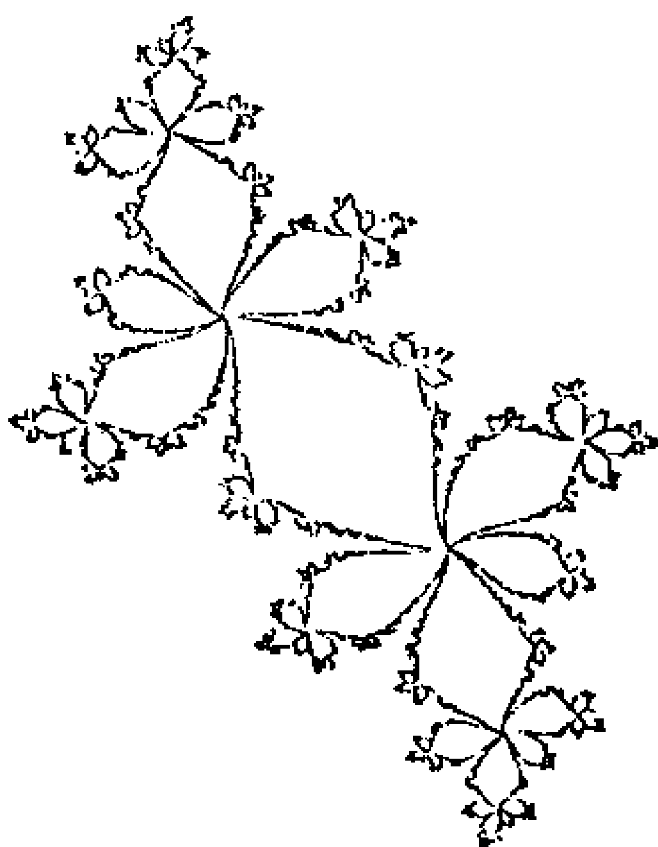


图 1.1.3 Julia 集

例 1.1.3 图1.1.4表示的是平面上的布朗运动的运动轨迹图。微粒间的分子碰撞的结果导致微粒沿随机的非常不规则的轨道运动，这种轨道没有上述两例中的集合的严格自相似性或“拟自相似性”，但它具有统计自相似性，即轨道的某一小部分放大之后与某一较大的部分有相同的概率分布，这种分形可以称之为随机分形。

例 1.1.4 图1.1.5表示的是挪威南部某段海岸线，粗略看起来，它也具有(ⅰ)—(ⅴ)中的大部分性质，但这只是在近似的意义下。图中的部分与整体只是“相像”，它反映出来的自相似性比上面几例中的相似性都要弱，只有“近似的自相似性”。自然界中许多物体的轮廓线都具有与例 4 相同的性质，如云彩的边界，流体的湍流，山地的轮廓等。在一定的尺度范围内，都可以把它们看成是分形，用充分小的尺度观测时，它们的分形特性就消失了。

总结以上四个例子，可以看出，分形集是一类不能用经典几何方法描述的“不规则”集，它们基本上满足条件(ⅰ)—(ⅴ)，但在自相似的程度上可以有很大的差别，而分形几何正是研究所谓“简单”空间上这样一类“复杂”子集的一门新兴的数学分支。

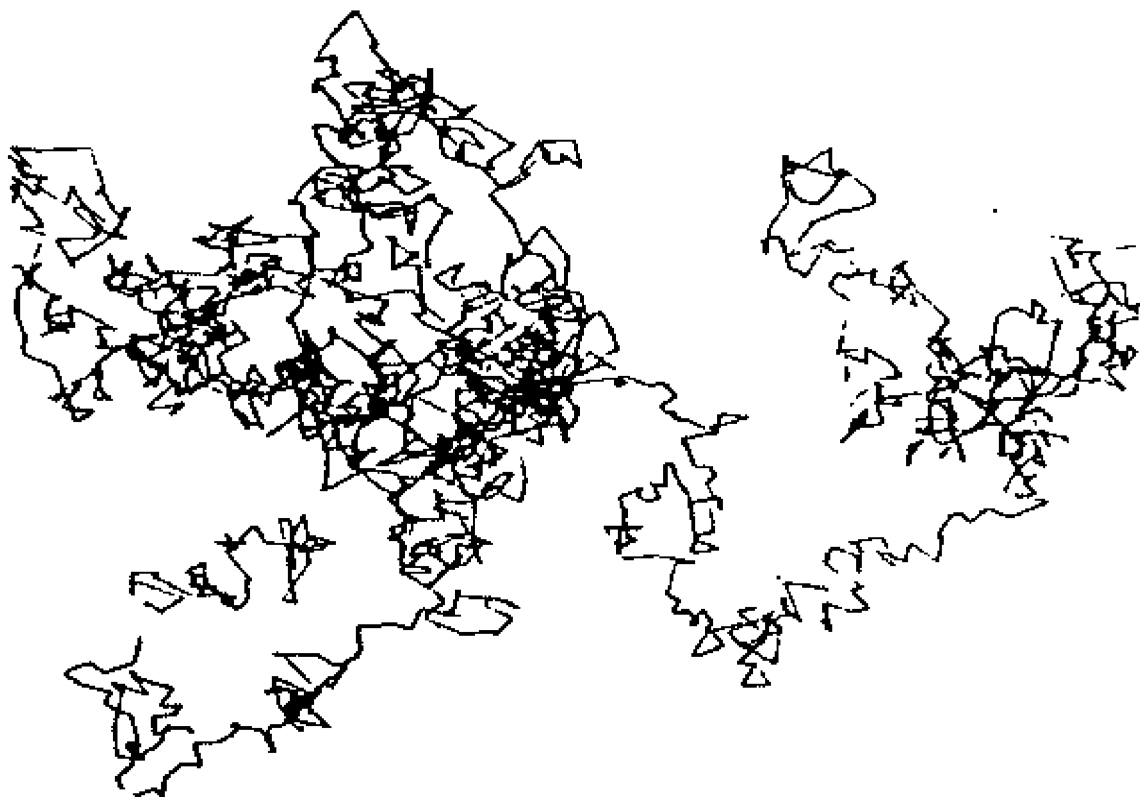


图 1.1.4　平面中的布朗运动轨道



图 1.1.5　挪威南部某段海岸线，它具有精细结构及一定程度的自相似性，在一定的尺度范围内，可以把它看成是一个分形集

1.2 分形维数

分形集的“不规则”性使它区别于经典的光滑点集，但是，如何来量度两个分形集的“不规则”的程度呢？分形维数提供了一种比较分形的客观工具。分形维数的重要性在于它们能够用数据定义，并且能通过实验手段近似地计算，分形维数已突破一般拓扑集的整数维的界线，引进了分数维，这也正是分形几何刚出现时最令人困惑的一点，从下面的例中可以看出这种维数概念延拓的合理性。

例 1.2.1 测量广义 von Koch 曲线的长度，按经典欧氏几何的方法，对任一拓扑一维的光滑的曲线，我们可以用折线段来逼近它，如图 1.2.1，欲测出 A，B 间的曲线的长度，在 A，B 上任取分点 $M_0=A$，M_1，$M_2\cdots M_n=B$，设 $|\overline{U_i}|=|M_{i-1}M_i|$ 表示相邻两分点的直线段的长度，则

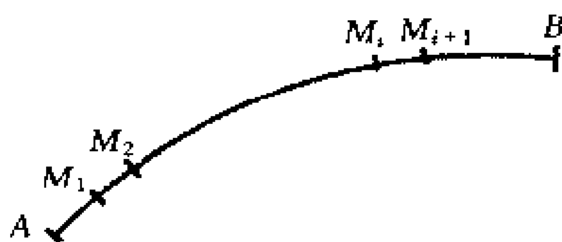


图 1.2.1 用折线逼近法求光滑曲线的弧长

$$\overset{\frown}{AB}\text{ 的长度 }=\lim_{\max|U_i|\to 0}\sum_i|U_i| \tag{1.2.1}$$

同样，对一个二维区域，如果是平面上具有光滑边界的区域，如图 1.2.2，正方形网格与二维区域 G 相交。

则有

$$G\text{ 的面积 }=\lim_{|U_i|\to 0}\sum_i|U_i|^2 \tag{1.2.2}$$

其中 $\sum\limits_i$ 表示对所有与 G 相交的正方形求和，$|U_i|$ 表示正方形的边长。

而对例 1.1.1 中的广义 von Koch 曲线，我们只考虑(a)型广义曲线的长度，简单的计算表明，第 k 步迭代时，E_k 的长度为 $(5/4)^k$，令 $k\to\infty$ 时，即知，对(a)型广义 von Koch 曲线 F，有

$$F\text{ 的长度 }=\lim_{\max|U_i|\to 0}\sum_i|U_i|=\infty \tag{1.2.1$'$}$$

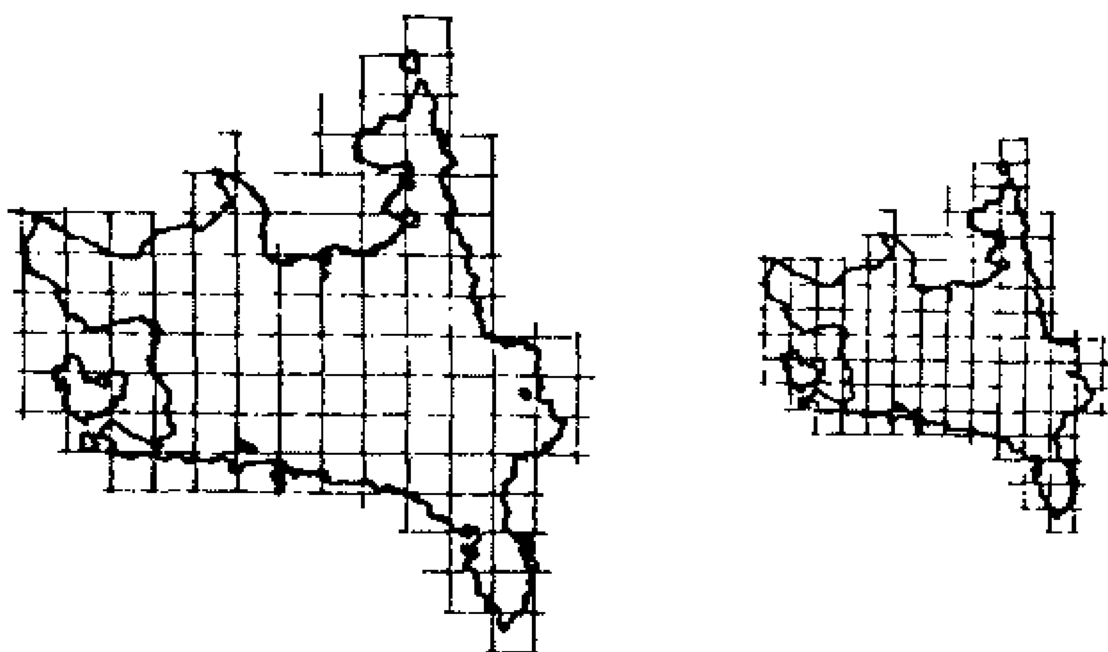


图 1.2.2　用正方形网格与二维区域 G 相交，求区域 G 的面积

另一方面，广义 von Koch 在平面内不占有面积，因此它的面积为零。所以用式(1.2.2)的形式计算，可以写成

$$F \text{ 的面积} = \lim_{|U_i|\to 0}\sum_i |U_i|^2 = 0 \qquad (1.2.2)'$$

所以，一维度量长度，二维度量面积对广义 von Koch 曲线的"大小"都没能给出有效的描述，那么有没有一个合适的度量能给广义 von Koch 曲线这样的分形集予合理的描述呢？下面我们将会看到，如果在式(1.2.1)′和(1.2.2)′中 $|U_i|$ 的指数不用 1 和 2，而改用某一个合适的 s，$1<s<2$，对广义的 von Koch 曲线，

$$\mathscr{H}^s(F) = \lim_{|U_i|\to 0}\sum_i |U_i|^s \qquad (1.2.3)$$

能趋于一个有限的值。也就是说，这个介于 1 和 2 之间的合适的数，能更好的反映广义 von Koch 曲线的几何特征，这个分数 s 更适合用来描述广义 von Koch 曲线。s 的值也就是下面要讲到的分形集 F 的分形维数。

上述讲解是相当粗略的，但至少直观地说明，通常所用的整数维概念已不足于用来描述分形集的复杂程度，或者说，不能很好地用来

说明各种集合充满空间程度的不同，也不能很好地对比两个集合不同的粗糙程度。所以，下面引进的分形维数是很自然的。每一个分形集都对应一个以某种方式定义的分形维数，这个维数值一般是分数的，但正如将要看到的，也有整数维的分形集。

形形色色的分维已成为研究分形几何的主要工具，这些维数有的定义的比较科学，而另一些可能理论性差一些，但在应用上也许方便一点。本章主要介绍三种维数：自相似维数、豪斯道夫维数以及盒维数。

定义 1.2.1 设 A 是 (R^d, ρ_E) 上的有界子集，如果 A 可以分成 $N(>1)$ 个相等的且与 A 相似的部分，则称 A 为自相似集，且如果每部分与 A 的相似比为 $r=\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D}}$，则称 D 为自相似集 A 的自相似维数。记为 $\dim_s A = D$

$$D = \dim_s A = \frac{\log N}{\log 1/r} = -\frac{\log N}{\log r} \qquad (1.2.4)$$

这个定义只对自相似集定义，也只有自相似集才有自相似维数。

例 1.2.2 如图1.2.3(a)，一直线段 A 可以分成 4 段相等的，比例系数都为 1/4 的与原线段相似的相似形，因此直线段的自相似维数

$$\dim_s A = -\log 4/\log \frac{1}{4} = 1$$

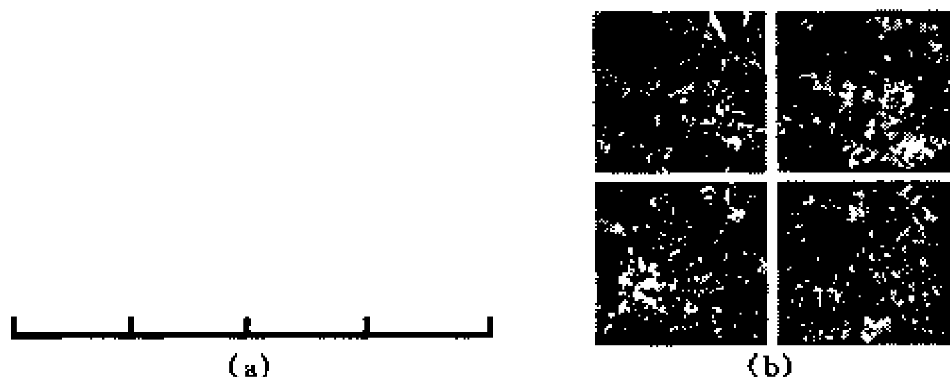


图 1.2.3 (a) 把直线段分成 4 等分，相似比是 1/4；
(b) 把正方形分成 4 等分，相似比是 1/2。

同样，如图 1.2.3(b)，一个正方形 B 可以分成 4 个比例系数为 1/2 的小正方形，于是正方形的自相似维数为：

$$\dim_s B = -\log 4/\log \frac{1}{2} = 2$$

一般，光滑的自相似集，它的自相似维数就等于它的拓扑维数。

例 1.2.3 图1.2.4是 Sierpinski 海绵，它是由单位立方体经过无穷次迭代而得出的，每次迭代都把正方体等分成 27 个小正方体，并且去掉中心的一个和每一面中央的一个，共去掉七个小正方体，保留下 20 个小正方体。

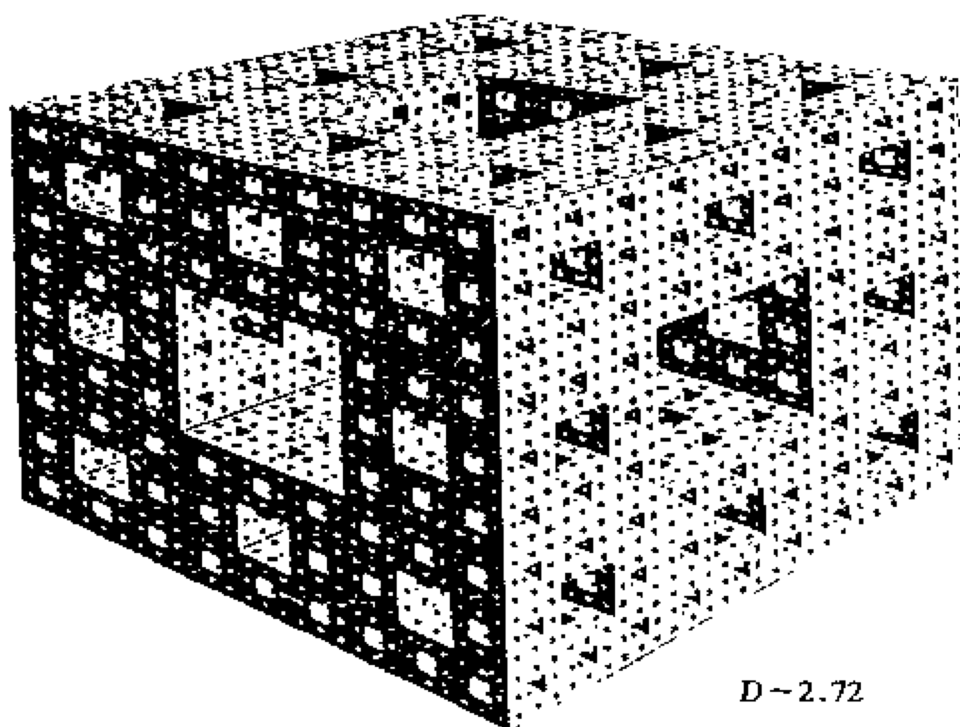


图 1.2.4 Sierpinski 海绵，它的自相似维数等于 log20/log3

于是 $N = 20$，$r = 1/3$

$$\dim_s A = -\log 20/\log(1/3) \simeq 2.73$$

下面的一个例子，可以从一集合充满空间的程度，说明分维的几何意义。

例 1.2.4 图1.2.5是 Arboresent 肺图，开始时是两个顶角为 $90° + \varepsilon$ 的等腰三角形，它们有一个公共的锐角顶点，从这个顶点，两

个三角形长边张成2ϵ的角，第一步迭代是把每个三角形分成两个顶角为$90^\circ+\epsilon$的小锐角等腰三角形，中间剪去角度为2ϵ的一个裂口，并依此类推，它的极限集是一个很美丽的分形集。

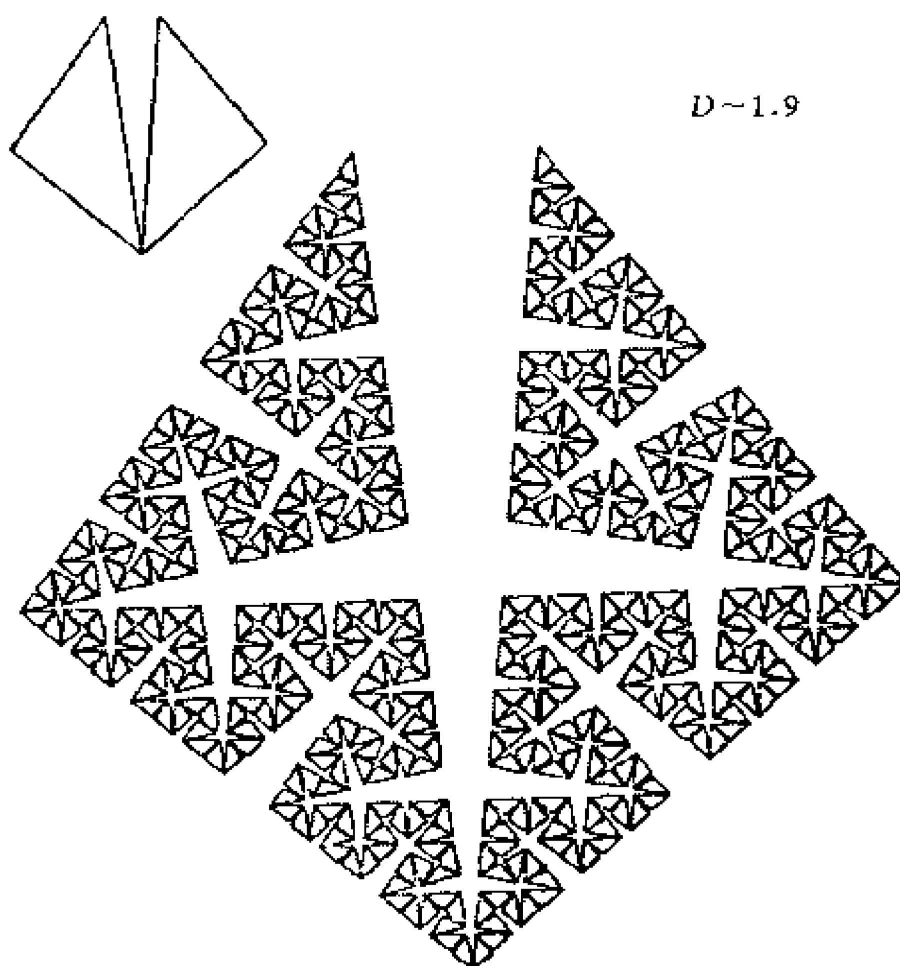


图 1.2.5　Arboresent 肺，它的自相似维数等于 $\log 2/\log[\cos\epsilon/\sin(45^\circ-\epsilon/2)]$

那么根据定义1.2.1，易见$N=2$，相似比等于等腰三角形腰与底边之比，由初等三角的知识：

$$r=\frac{\sin(\pi/4-\epsilon/2)}{\cos\epsilon}$$

于是由式(1.2.4)，$\dim_s A=\dfrac{-\log 2}{\log\dfrac{\sin(45^\circ-\epsilon/2)}{\cos\epsilon}}$

当$\epsilon=30^\circ$时，$\dim_s A=\dfrac{\log 2}{\log(\cos 30^\circ/\sin 30^\circ)}\simeq 1.26$。

此时，去掉的部分较多，分形集充满空间的程度较小。

当 $\varepsilon=10^\circ$时，$\dim_s A=-\log 2/\log\dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}\simeq 1.63$

显然，此时的分形集比 $\varepsilon=30^\circ$情形弃满空间的程度度要大得多。

$\varepsilon=2^\circ$，类似地可以求出 $\dim_s A=\dfrac{-\log 2}{\log\dfrac{\sin 44^\circ}{\cos 2^\circ}}\simeq 1.91$。

$\varepsilon=2^\circ$时，去掉的部分相当小，Arboresent 肺几乎充满整个有界区域，它的自相似维数很接近 2。可以想像，当 $\varepsilon\to 0^\circ$时，$\dim_s A\to 2$。

自相似维数只对严格自相似的一小类集合有意义，因此，下面介绍两种在任何集上都可以定义的，在分形的理论与应用中起极重要作用的两个分形维数，豪斯道夫维数与盒维数。

设$\{U_i\}$为可数（或有限）个直径不超过 δ 的度量空间(X,ρ)上的一个子集类，A 是 X 的一个子集，若 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$，则称子集类$\{U_i\}$是集 A 的一个δ—覆盖。

设 A 为度量空是$(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$的任一有界子集，$s\geqslant 0$，对任意 $\delta>0$，定义

$$\mathscr{H}_\delta^s(A)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s:\{U_i\}\text{是 }A\text{ 的}\delta\text{—覆盖}\}\qquad(1.2.5)$$

其中，$|U_i|$表示集合$\{U_i\}$的直径，当 δ 值变小时，能覆盖 A 的δ—覆盖类变少，因此 $\mathscr{H}_\delta^s(A)$的值是不降的，于是，极限值

$$\mathscr{H}^s(A)=\lim_{\delta\to 0}\mathscr{H}_\delta^s(A)\qquad(1.2.6)$$

存在（这个极限值可以是∞），由测度的概念，容易验证，$\mathscr{H}^s(\cdot)$定义了$(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$的 Borel 集类上的一个测度。

定义 1.2.2　设集 A 是度量空间$(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$的 Borel 子集，对任意 $s\in(0,\infty)$，称式(1.2.6)定义的 $\mathscr{H}^s(A)$为集 A 的 s—维豪斯道夫测度。

对固定的 A，$\mathscr{H}^s(A)$作为 $s\in(0,\infty)$的函数，取值是很特殊的。它的值域只包含两个值（零和无穷）或三个值（零，一个有限值和无穷

值)如图 1.2.6 所示。

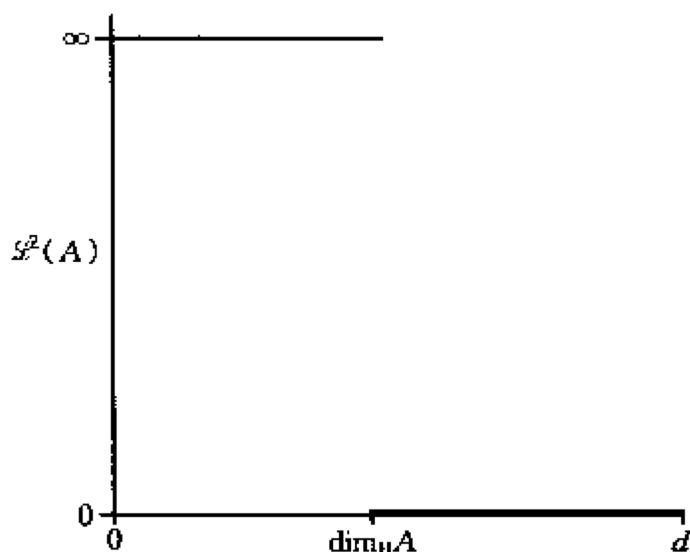


图 1.2.6　集 A 的 $\mathcal{H}^s(A)$ 对 s 的图。豪斯道夫维数是使∞"跳跃"到 0 发生的 s 的数值

定理 1.2.1　设 A 是$(\boldsymbol{R}^d, \rho_E)$的有限子集，则存在惟一的实数值 $s_0 \in [0, d]$使

$$\mathcal{H}^s(A)=\begin{cases}\infty & s<s_0 \\ 0 & s>s_0\end{cases} \tag{1.2.7}$$

证明　给定子集 A，设 $\delta<1$，又设$\{U_i\}$是 A 的 δ—覆盖，则有当 $t>s$

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leqslant \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

取下确界即得：

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leqslant \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

在上式中令 $\delta \to 0$，如果

$$\mathcal{H}_\delta^s(A)<\infty$$

则　$\mathcal{H}^t(A)=0$，于是如果 $\mathcal{H}^0(A)<\infty$，则对任意 $s>0$，都有

$$\mathcal{H}^s(A)=0\text{，此时，} s_0=0\text{。}$$

如果 $\mathcal{H}^0(A)=\infty$，沿着 s 轴向右找，如果有 s_0，使首次有 $\mathcal{H}^{s_0}(A)$

$<\infty$，则当 $s>s_0$ 时，$\mathcal{H}^s(A)=0$，s_0 即定理所求的惟一的值。

至于为什么对任意的集 A，都有 $s_0\leqslant d$，可以从下面的性质 1.2.1 看出。

定义 1.2.3 设集 A 是度量空间 $(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$ 的子集，由定理 1.2.1 所决定的惟一实数值 s_0 称为集 A 的豪斯道夫维数，记为

$$\dim_H A=s_0$$

豪斯道夫维数是一种较合理的维数，它是建立在相对比较容易处理的测度概念的基础上，因此，在数学上也是较方便的，它具有很多很好的性质，这里只考虑简单性质，在变换下维数的性质留在第 2 章讨论。

性质 1.2.1 设 A 是度量空间 $(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$ 的子集，则

$$\dim_H A\leqslant d$$

证明 设 C 为 $\boldsymbol{R}^s$ 中的单位立方体，将 C 等分成 k^d 个立方体，取 $\delta\geqslant k^{-1}d^{1/2}$ 时：

$$\mathcal{H}_\delta^d(C)\leqslant k^d(k^{-1}d^{1/2})^d\leqslant d^{d/2}<\infty$$

因此，$\mathcal{H}^d(C)<\infty$，当 $s>d$ 时，$\mathcal{H}^s(C)=0$，又由于 $\boldsymbol{R}^d$ 可以表示成单位立方体的可数并，因此，对大于 d 的 s，也有 $\mathcal{H}^s(\boldsymbol{R}^d)=0$，由测度的单调性，对 $A\subset\boldsymbol{R}^d$，也有 $\mathcal{H}^s(A)=0$，所以 $\dim_H A\leqslant d$。

性质 1.2.2 设 $A\subset\boldsymbol{R}^d$ 是开集，则

$$\dim_H A=d$$

证明 因为集 A 内包含有正体积的 d 维闭球。

性质 1.2.3 如果 $A\subset B$，则

$$\dim_H A\leqslant\dim_H B$$

证明 利用豪斯道夫测度 $\mathcal{H}^s(\cdot)$ 的单调性，即得此性质。本性质一般称为豪斯道夫维数的单调性。

性质 1.2.4 设 $A_1,A_2,\cdots$，为 $\boldsymbol{R}^d$ 的一子集序列，则

$$\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sup_i(\dim_H A_i)$$

证明 由单调性立得

$$\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\geqslant\sup_i(\dim_H A_i)$$

下面证反向不等号，如若不然，设

$$\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)>\sup_i(\dim_H A_i)$$

则存在 $t>0$ 介于上式两个数之间，使任一 i

$$\mathscr{H}^t(A_i)=0$$

但 $\mathscr{H}^t(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\infty$，矛盾表明性质 4 成立。本性质一般称为豪斯道夫维数的可数稳定性。

性质 1.2.5 设 A 为可数点集，则

$$\dim_H A=0$$

证明 设 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，$A_i$ 是单点集，对任一 i，$\mathscr{H}^0(A_i)=1$，即

$$\dim_H A_i=0$$

由性质 1.2.4 即得性质 1.2.5。

下面介绍一个直接计算分形集的豪斯道夫维数的例子。

例 1.2.5 图1.2.7所示的分形，一般称为康托尘。它是将单位正方形等分成 16 个完全相等的小正方形，经过无穷多次迭代得到的。每次迭代只在每行(列)保留下一个小正方形，并且把同样的做法在留下的小正方形上重复直至无穷次。试求极限集康托尘 A 的豪斯道夫维数。

解 显然 A 可被第k 次选中的 4^k 个边长为 4^{-k}的正方形覆盖，于是

$$\mathscr{H}_\delta^1(A)\leqslant 4^k\cdot 4^{-k}\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}$$

这里取 $\delta=4^{-k}\sqrt{2}$，当 $k\to\infty$时，$\delta\to 0$，此时 $\mathscr{H}^1(A)\leqslant\sqrt{2}$，所以

$$\dim_H A\leqslant 1$$

又因为 A 在 x 轴的射影 $\mathrm{proj}A=[0,1]$，又由于射影不增加距离，即对任意 $x,y\in\boldsymbol{R}^d$

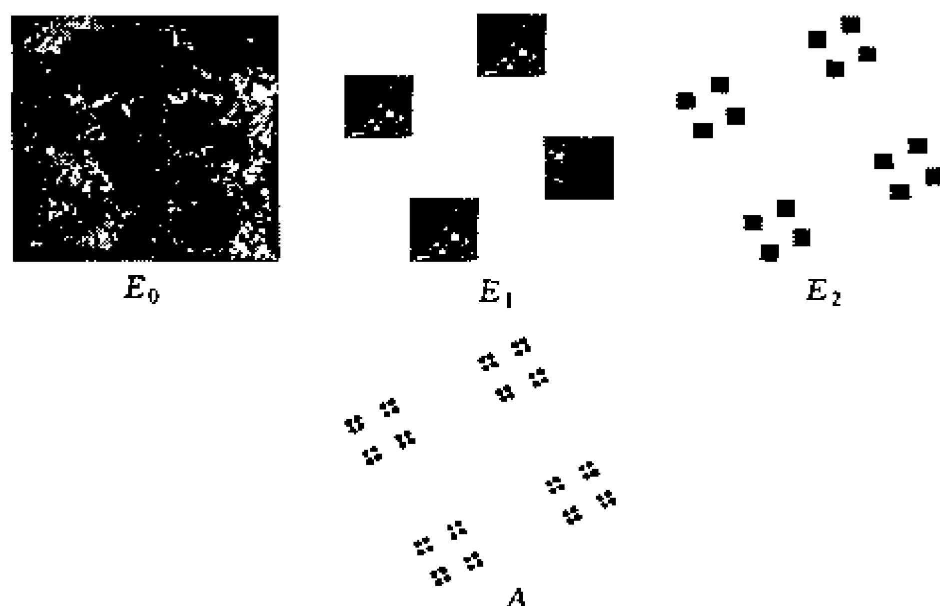


图 1.2.7　康托尘的构造,每次迭代把上一次保留下来的正方形分成 16 个小正方形,在每行(列)只保留下一个小正方形

$$\rho_E(\text{proj}x, \text{proj}y) \leqslant \rho_E(x, y)$$

所以由下一节定理 2 证明中的式(1.3.12)知,

$$1 = \dim_H(\text{proj}A) \leqslant \dim_H A$$

最后知

$$\dim_H A = 1$$

康托尘具有典型的分形性质,是一个严格自相似分形。但它的豪斯道夫维数却等于整数,所以以为分形集的分维一定是分数维这种观念是错误的。

用式(1.2.4)定义的自相似维数的公式,也可以很容易的求得康托尘的自相似维数

$$\dim_s A = -\log 4/\log \frac{1}{4} = 1$$

可见至少在康托尘 A 上

$$\dim_s A = \dim_H A \tag{1.2.8}$$

在第 2 章中,可以用变换证明,对严格自相似集 A,式(1.2.8)总是成立的。

在下节中，介绍一种实验性很强的应用较广的维数概念——盒维数，同时也涉及到豪斯道夫维数及盒维数之间的关系，以及它们在变换之下的一些性质。

1.3 盒维数

豪斯道夫维数是理论性很强而实际背景较少的维数，在实际应用中，我们经常应用的一种维数是盒维数，它能够通过实验近似地计算，并且在一些比较“规则”的集上，这种维数值与豪斯道夫维数是相等的。

我们只在度量空间的紧子集上考虑这个定义，这对我们定义这个维数更侧重于实验中的应用已是足够了。

下面，用符号 $\mathscr{F}(X)$ 表示度量空间 X 上的全体紧子集组成的集类。

定义 1.3.1 令 $A\in\mathscr{F}(X)$，(X,ρ) 为一度量空间，对每一 $\delta>0$，用 $N_\delta(A)$ 表示覆盖 A 的直径为 $\delta>0$ 的闭球的最少个数，如果

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta} \tag{1.3.1}$$

存在，则称这个极限值为集 A 的盒维数，记为 $\dim_B A$。

如果集 A 的盒维数为 s，则由式(1.3.1)可知覆盖集 A 的最少闭球数服从幂定律，即对某个常数 c，

$$N_\delta(A)\approx c\delta^{-\delta} \tag{1.3.2}$$

在盒维数定义中的闭球覆盖可以等价地换成边长为 δ 的单位正方体。

R^d 中称为 δ—网坐标块的立方体，即下列形式的立方体：

$$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_d\delta,(m_d+1)\delta]$$

其中，$m_1,m_2,\cdots,m_d$ 都是整数。（容易看出：在 $\boldsymbol{R}^1$ 中，此立方体就是长度为 δ 的区间；而在 $\boldsymbol{R}^2$ 中，则是边长为 δ 的正方形）。

引理 1.3.1 在定义1.3.1中，如果将 $N_\delta(A)$ 换成集 A 与 δ—网坐标块相交的个数，则定义中的维数值不变。

证明 用 $M_\delta(A)$ 表示集 A 与 δ—网坐标块相交的个数，则可以将每个坐标稍微扩大一些，成为一个直径为 $\delta\sqrt{d}$ 的闭球。这 $M_\delta(A)$ 个直径为 $\delta\sqrt{d}$ 的闭球是集 A 的一个 $\delta\sqrt{d}$—覆盖，所以，

$$N_{\delta}\sqrt{d}(A)\leqslant M_\delta(A)$$

只要 δ 充分小，就有

$$\frac{\log N_\delta\sqrt{d}(A)}{-\log\delta\sqrt{d}}\leqslant\frac{\log M_\delta(A)}{(-\log\delta-\log\sqrt{d})} \tag{1.3.3}$$

在式(1.3.3)中，令 $\delta\to0$，即得

$$\dim_{\mathrm{B}}(A)\leqslant\frac{\lim\limits_{\delta\to0}M_\delta(A)}{(-\log\delta)} \tag{1.3.4}$$

另一方面，直径为 δ 的闭球包含在 3^d 个 δ—网坐标块内，所以，

$$M_\delta(A)\leqslant3^dN_\delta(A)$$

即

$$\frac{\log M_\delta(A)}{(-\log\delta)}\leqslant\frac{(\log N_\delta(A)+d\log3)}{(-\log\delta)} \tag{1.3.5}$$

在上式中，也令 $\delta\to0$，又有

$$\lim_{\delta\to0}\frac{\log M_\delta(A)}{(-\log\delta)}\leqslant\dim_{\mathrm{B}}A \tag{1.3.6}$$

综合式(1.3.4)及式(1.3.6)，得

$$\dim_{\mathrm{B}}A=\lim_{\delta\to0}\frac{\log M_\delta(A)}{(-\log\delta)}$$

上面用到的坐标网块也可以看成是一个个“盒子”，盒维数的名称就是由此而来的。

引理 1.3.2 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，其中 (X,ρ) 是度量空间，令 $\delta_n=cr^n$，$0<r<1$，$c>0$，则当定义 1.3.1 中定义的盒维数存在时，有

$$\dim_{\mathrm{B}}(A)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\log N_{\delta_n}(A)}{\log\delta_n}\right)$$

证明 如果 $\delta_{n+1}\leqslant\delta\leqslant\delta_n$，$N_\delta(A)$ 表示 A 与 δ—网坐标块相交的个数，

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\frac{\log N_{\delta_{n+1}}(A)}{-\log\delta_n}\leqslant\frac{\log N_{\delta_{n+1}}(A)}{-\log\delta_{n+1}+\log(\delta_{n+1}/\delta_n)}$$

即

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\frac{\log N_{\delta_{n+1}}(A)}{-\log\delta_{n+1}+\log r}$$

因此有

$$\dim_B A=\lim_{\delta\to\infty}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{N_{\delta_n}(A)}{-\log\delta_n}$$

同样又可证 $$\dim_B A\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N_{\delta_n}(A)}{-\log\delta_n}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{\delta_n}(A)}{\log\delta_n}=\dim_B A。$$

例 1.3.1 求 Sierpinski 三角形的盒维数，图 1.3.1Sierpinski 三角形是从一个腰长为 1 的等腰直角三角形开始，第一次把它分成四个相等的等腰直角三角形，去掉中心的一个，再在剩下的三个三角形中重复同样的做法，迭代的极限集为 A

$$取\ \delta_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad 记\ N_{\delta_n}(A)=N_n(A)$$

显然 $$N_1=3,N_2=9,N_3=27,\cdots,N_n=3^n$$

所以 $$\dim_B A=\frac{\log N_n}{-\log\delta_n}=-\frac{\log 3^n}{\log\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{\log 3}{\log 2}$$

可以证明，盒维数具有一些与豪斯道夫维数类似的性质，比如：

(i) 对 $\boldsymbol{R}^d$ 上的 m 维子流形 A，$\dim_B A=m$

(ii) $A\subset\boldsymbol{R}^d$，则 $\dim_B A\leqslant d$

(iii) $\dim_B(\cdot)$是单调的，即 $A\subset A'$，则

$$\dim_B A\leqslant\dim_B A'$$

(iv) $\dim_B(\cdot)$是有限稳定的，即

$$\dim_B(E\cup F)=\max(\dim_B E,\dim_B F)$$

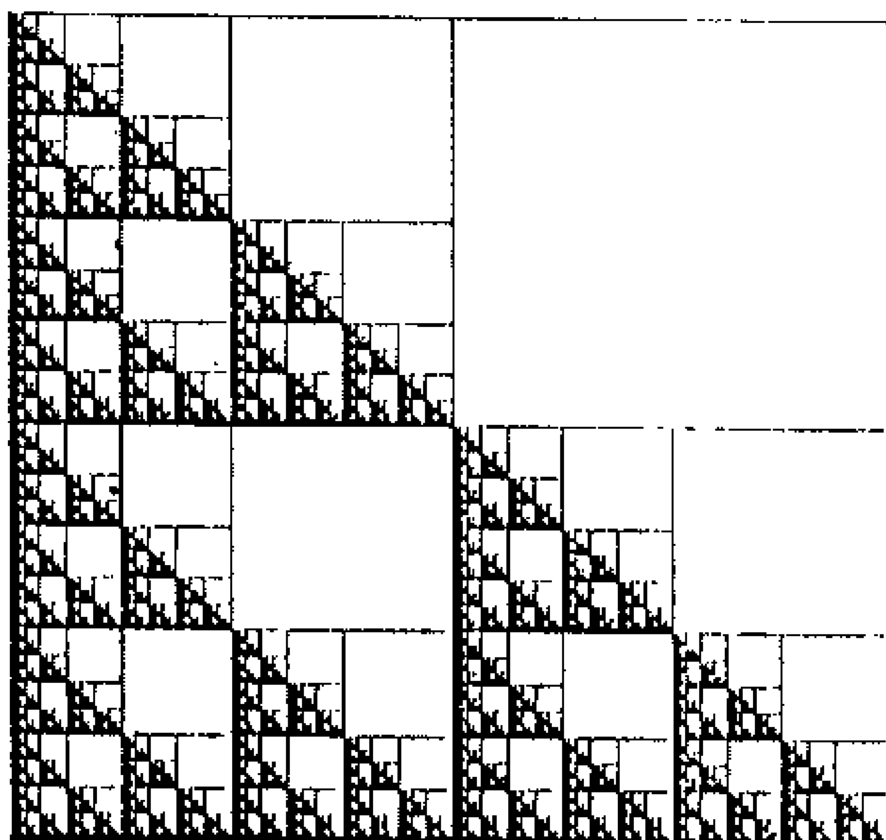


图 1.3.1 覆盖 Sierpinski 三角形需要边长为 $1/2^n$ 的闭盒子 3^n 个

但可数稳定性一般不真。

下面定理介绍了盒维数与豪斯道夫维数之间的关系。

定理 1.3.1 设 A 是度量空间$(\boldsymbol{R}^d,\rho_E)$上的紧子集,则有:

$$\dim_H A \leqslant \dim_B A \leqslant d$$

证明 只证明 $\dim_H A \leqslant \dim_B A$,设 $s=\dim_H A$,则对任意充分小的 $\varepsilon>0$,$\mathscr{H}^{s-\varepsilon}(A)=\infty$,所以只要 δ 充分小 $\mathscr{H}_\delta^{s-\varepsilon}(A)>1$。如果 $N_\delta(A)$是覆盖集 A 的直径为 δ 的最少闭球数,由 $\mathscr{H}_\delta^{s-\varepsilon}(A)$的定义知,只要 δ 充分小,

$$1<\mathscr{H}_\delta^{s-\varepsilon}(A)<N_\delta(A)\delta^{s-\varepsilon}$$

取对数得

$$\log N_\delta(A)+(s-\varepsilon)\log\delta>0$$

则有

$$\dim_B(A) = \frac{\log N_\delta(A)}{(-\log\delta)} \geqslant s - \epsilon \tag{1.3.7}$$

对任意充分小的 $\epsilon > 0$ 成立，即得结论。

定理 1.3.2 设(X_1, ρ_1)，(X_2, ρ_2)是两个等价的度量空间，设 θ 是使两个空间等价的变换，θ，$X_1 \to X_2$，$A_1 \in \mathscr{F}(X_1)$，如果 $A_2 = \theta(A_1) \in \mathscr{F}(X_2)$，则

$$\dim_H A_1 = \dim_H A_2 \tag{1.3.8}$$

$$\dim_B A_1 = \dim_B A_2 \tag{1.3.9}$$

证明 只证式(1.3.8)，式(1.3.9)类似可证。因为(X_1, ρ_1)和(X_2, ρ_2)在 θ 下等价，所以由等价定义知存在正常数 e_1 和 e_2，使

$$e_1\rho_1(\theta(x), \theta(y)) \leqslant \rho_1(x, y) \leqslant e_2\rho_2(\theta(x), \theta(y)), \forall x, y \in X_1 \tag{1.3.10}$$

不失一般性，可以设 $e_1 < 1 < e_2$，则由式(1.3.10)可知

$$\rho_2(\theta(x), \theta(y)) \leqslant \frac{1}{e_1\rho_1(x, y)} \tag{1.3.11}$$

如果$\{U_i\}$是 A_1 的一个 δ—覆盖，则$\{\theta(U_i)\}$是 $A_2 = \theta(A_1)$的一个 $e_1^{-1}\delta$—覆盖，且有

$$\mathscr{H}^s_{e_1^{-1}\delta}(A_2) \leqslant \sum_i |\theta(U_i)|^s \leqslant e_1^{-1}\sum |U_i|^s = e_1^{-1}\mathscr{H}^s_\delta(A_1) \forall s \geqslant 0$$

令 $\delta \to 0$ 有 $\mathscr{H}^s(A_2) \leqslant e_1^{-1}\mathscr{H}^s(A_1)$即

$$\dim_H A_2 \leqslant \dim_H A_1 \tag{1.3.12}$$

利用式(1.3.10)右边的不等号，同样可以证明：

$$\mathscr{H}^s(A_1) \leqslant e_2\mathscr{H}^s(A_2)$$

即得 $\dim_H A_1 \leqslant \dim_H A_2$ 式(1.3.8)获证。

如果两个度量空间只是拓扑等价，它们的分维可以不同，下面的例题说明了这种情况。

例 1.3.2 设(X, ρ)为度量空间，$S_1, S_2 \subset X$，且 $S_2 = \theta(S_1)$其中 $\theta: S_1 \to S_2$ 满足 Hölder 条件，即

$$\rho(\theta(x),\theta(y))\leqslant c[\rho(x,y)]^{\alpha},\ \forall x,y\in S_1 \quad (1.3.13)$$

显然,可以使 θ 是 $S_1\to S_2$ 的同胚,所以 $(S_1,\rho_1)(S_2,\rho_2)$ 是拓扑等价的,但

$$\dim_H S_2\leqslant\frac{1}{\alpha}\dim_H S_1$$

证明 若 $\{U_i\}$ 为 S_1 的 δ—覆盖,则由式(1.3.11)$|\theta(S_1\cap U_i)|\leqslant c|U_i|^{\alpha}$,且 $\{\theta(S_1\cap U_i)\}$ 为 $\theta(S_1)$ 的一个 $\epsilon=c\delta^{\alpha}$ 覆盖,则对每个 s 就有

$$\sum_i|\theta(S_1\cap U_i)|^{s/\alpha}\leqslant c^{s/\alpha}\sum_i|U_i|^{s}$$

即

$$\mathscr{H}_{\epsilon}^{s/\alpha}(\theta(S_1))\leqslant c^{s/\alpha}\mathscr{H}_{\delta}^{s}(S_1)$$

令 $\delta\to 0$,同时有 $\epsilon\to 0$,即得:

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(\theta(S_1))\leqslant c^{s/\alpha}\mathscr{H}^{s}(S_1)$$

所以,若 $s>\dim_H S_1$,则

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(\theta(S_1))\leqslant c^{s/\alpha}\mathscr{H}^{s}(S_1)=0$$

即对 $\forall s>\dim_H S_1$,都有:

$$\dim_H(\theta(S_1))\leqslant s/\alpha$$

所以

$$\dim_H S_2\leqslant 1/\alpha\dim_H S_1$$

下面介绍的定义 1.3.1′与定义 1.3.1 是等价的,它的形式在理论上有一定意义,但实际应用不如原定义方便。

定义 1.3.1′ 设 (X,d) 是完全度量空间,$A\in\mathscr{F}(X)$,$N_\delta(A)$ 表示覆盖集 A 的直径为 δ 的最小闭球数,如果:

$$\limsup_{\delta\to 0}\left\{\frac{\log N_{\bar{\delta}}(A)}{-\log\bar{\delta}}:\bar{\delta}\in(0,\delta)\right\}$$

存在,则称它为 A 的盒维数,记为 $\dim_B A$

经常用盒维数来作为分形维数的数值,这个数值可以用试验近

似求得，下面介绍实验中求盒维数的方法。一般可以利用 δ 值的一个适当范围作出重对数图的斜率来估计集 A 的盒维数，δ 取值的范围应根据实际问题的背景及它的尺度范围给予合适的选择。

例 1.3.3 图1.3.2表示的是，用半径为 δ 的闭圆覆盖某个集合 A 所得的数据做出的重对数图，图中直线的斜率可以作为盒维数的估计值，这就可以得出

$$\dim_B A \simeq 1.2$$

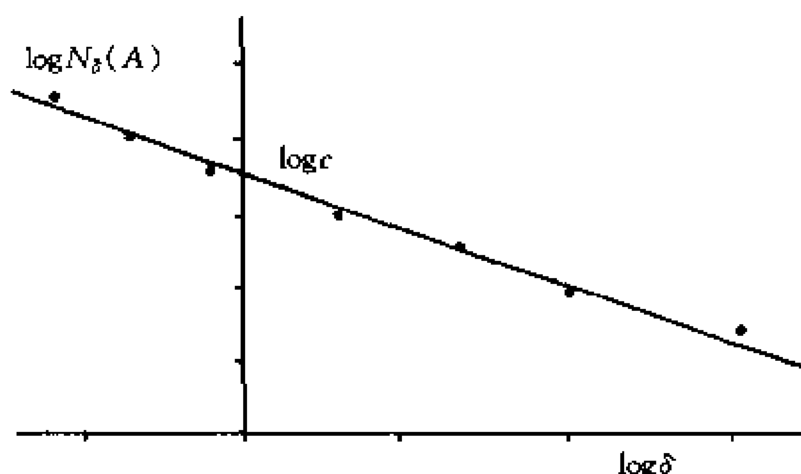


图 1.3.2　例 1.3.2 中分形的重对数图，盒维数的估计值为图中直线的斜率 $\dim_B A \simeq 1.2$

δ 的范围与要估计的分形集的特征长度密切相关，这里我们只想介绍这种方法，而 δ 如何取值更合适，只能依靠读者自已的摸索与经验积累，才能找出合适的标度范围。

1.4　分形空间

从严格的数学观点分极，分形集一般是$(\boldsymbol{R}^d, \rho_E)$或$(\hat{C}, \rho_s)$空间上的紧子集，这些空间经常用$(X, \rho)$表示，并且要研究分形，必然要考虑$(X, \rho)$上的非空紧子集构成的空间 $\mathscr{F}(X)$。从本章的第一节已了解到分形不能用一般简短的逻辑叙述定义，但可以用与它们相关的一些特征来说明。我们还可以把分形集看成空间$(\mathscr{F}(X), h_\rho)$的子

集，这里的 h_ρ 是下面定义的豪斯道夫距离。

定义 1.4.1 设 (X,ρ) 是完备度量空间，$x\in X$，$B\in\mathscr{H}(X)$，称 $\rho(x,B)=\min\{\rho(x,y):y\in B\}$ 为点 x 到 B 的距离。

由于 B 的紧性，所以定义 1 中的最小值是存在的。

定义 1.4.2 如果 $A\in\mathscr{H}(X)$ 是度量空间 (X,ρ) 的子集，则 A 的 δ—平行体是与 E 的距离小于 δ 的点的闭集，即

$$A_\delta=\{x\in X:\rho(x,A)\leqslant\delta\}$$

定义 1.4.3 设 (X,ρ) 是完备的度量空间，$A,B\in\mathscr{H}(X)$，则称 $h_\rho(A,B)=\inf\{\delta:A\subset B_\delta$ 且 $B\subset A_\delta\}$ 为 A,B 间的豪斯道夫距离。(如果原来的基本空间用的是欧氏距离 ρ_E，则紧子集间的豪斯道夫距离用 h_E 表示)。

由定义 3 即知 $h_\rho(A,B)<\varepsilon\Leftrightarrow A\subset B_\varepsilon,B\subset A_\varepsilon$。同时，读者很容易验证，$h_\rho$ 是空间 $\mathscr{H}(X)$ 上的一个度量。(X,ρ) 是一个完备的度量空间，则如果在 X 的非空紧子集空间 $\mathscr{H}(X)$ 上赋予度量 h_ρ，$(\mathscr{H}(X),h_\rho)$ 就是一个度量空间，我们称之为"分形空间"，本书主要是从集的变化与函数的迭代研究分形的性质与计算机绘图方法，这些变化和迭代都以分形空间为舞台，因此，进一步了解分形空间的性质是很重要的，下面一个定理说明分形空间是一个完备的空间。

若 $\{A_n\}n=1,2\cdots$ 是 $(\mathscr{H}(X),h_\rho)$ 中的集序列，$(X_n)n=1,2\cdots$ 是 X 中的这样一个点序列，$\forall_n$，$x_n\in A_n$，我们把点列 $\{x_n\}$ 表成 $\{x_n\in A_n\}$，$n=1,2\cdots$，下面引理是证明空间 $(\mathscr{H}(X),h_\rho)$ 完备性要用到的。

引理 1.4.1 (扩张定理)，设 (X,ρ) 为一个度量空间，$\{A_n\}n=1,2\cdots$ 是空间 $(\mathscr{H}(X),h_\rho)$ 中的一个哥西列，$\{n_j\}j=1,2\cdots$ 是一个无穷整数列，$0<n_1<n_2<\cdots$，$\{x_{n_j}\in A_{n_j}\}j=1,2\cdots$ 是 (X,ρ) 中的一个哥西点列，则存在一个哥西点列 $\{\tilde{x}_n\in A_n\}n=1,2\cdots$ 使 $\tilde{x}_{n_j}=x_{n_j}$，$j=1,2\cdots$

证明 我们构造出序列 $\{\tilde{x}_n\in A_n\}n=1,2\cdots$，$\forall n\in\{1,2\cdots n_1\}$，

取 $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : \rho(x, x_{n_1}) = \rho(x_{n_1}, A_n)\}$ 即选择 A_n 中离 x_n 最近的点为 $\tilde{x}_n$（由于 A_n 的紧性，这样最近的点是存在的），类似地，对 $n \in \{n_j + 1, \cdots, n_{j+1}\}$ $\forall j \in \{2, 3 \cdots\}$，选 $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : \rho(x, x_{n_j}) = \rho(x_{n_j}, A_n)\}$，由构造过程知，$\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$, $j = 1, 2 \cdots$, $\tilde{x}_n \in A_n$, $n = 1, 2 \cdots$

下面只要证明 $\{\tilde{x}_n\}$ 是哥西列：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2$ 使 $n_k, n_j \geqslant N_1$, $m, n \geqslant N_2$, $\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$, $h_\rho(A_m, A_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$，令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $m, n \geqslant N$ 时

$$\rho(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leqslant \rho(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + \rho(x_{n_j} + x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, \tilde{x}_n)$$

其中 $m \in \{n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \cdots n_j\}$,

$n \in \{n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2 \cdots n_k\}$

因为 $h_\rho(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{3}$，存在 $y \in A_m \cap (\{x_{n_j}\})_{\frac{\varepsilon}{3}}$ 使 $\rho(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$，类似地有，$\rho(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$，因此有，$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \leqslant \varepsilon$, $\forall m, n > N$。

定理 1.4.1 （分形空间的完备性），设 (X, ρ) 是一个完备的度量空间，则 $(\mathscr{F}(X), h_\rho)$ 是一个完备度量空间，而且，如果 $\{A_n \in \mathscr{F}(X) | n = 1, 2 \cdots$ 是一个哥西列，则 $A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n \in \mathscr{F}(X)$ 可以表成

$$A = \{x \in X : 存在哥西序列 \{x_n \in A_n\} 收敛到 x\} \qquad (1.4.1)$$

证明 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}(X)$ 的哥西列，A 如式(1.4.1)定义，把证明分成以下几点

(a) $A \neq \varnothing$

(b) A 是闭集，由于 X 是完备的，所以 A 也是完备的

(c) $\forall \varepsilon > 0$，存在 N 使 $n \geqslant N$ 时 $A \subset (A_n)_\varepsilon$

(d) A 是完备有界的，故由(b)，A 是紧集

(e) $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$

先证(a) $\{A_n\}$ 是哥西列，可以找出整数序列 $N_1 < N_2 < \cdots < N_n < \cdots$ 使

$$h_\rho(A_m, A_n) < \frac{1}{2^j} \qquad \forall\, m, n \geqslant N_j$$

选定 $x_{N_1} \in A_{N_1}$，则因为 $h_\rho(A_{N_1}, A_{N_2}) \leqslant \frac{1}{2}$，我们可以找出 $x_{N_2} \in A_{N_2}$ 使 $\rho(x_{N_1}, x_{N_2}) \leqslant \frac{1}{2}$，依此，假设已选出有限序列 $x_{N_i} \in A_{N_i}$，$i = 1, 2 \cdots k$ 使

$$\rho(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}$$

又因为

$$h_\rho(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

可以找取 $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ 使 $\rho(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leqslant \frac{1}{2^k}$，由归纳法可以找到无穷序列 $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$ 使 $\rho(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leqslant \frac{1}{2^i}$，那么任给 $\varepsilon > 0$，存在整数 $N_\varepsilon > 0$，使 $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$，那么对 $m > n \geqslant N_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\rho(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leqslant \rho(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \rho(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \cdots + \\ &\quad \rho(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

由引理 1，存在 $a_{N_i} = x_{N_i}$ 的哥西列 $\{a_n\}$，使 $\{a_n \in A_n\}$，且由式(1.4.1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in A$$

故 $A \neq \varnothing$

证(b) 设 $\{a_i \in A\}$ 是一收敛到点 a 的序列，由式(1.4.1)，则存在一个上升的正数序列 $\{N_i\}$ $i = 1, 2 \cdots$ 使 $\rho(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$，对每一个

i，存在序列$\{x_{i,n}\in A_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_{i,n}=a_i$，因而，也存在正数序列$\{m_i\}$使$\rho(x_{N_i,m_i},a_{N_i})\leqslant\frac{1}{i}$，于是

$$\rho(x_{N_i,m_i},a)\leqslant\frac{2}{i}$$

令$y_{m_i}=x_{N_i,m_i}$，知$y_{m_i}\in A_{m_i}$，且$\lim\limits_{i\to\infty}y_{m_i}=a$，由引理1知存在收敛序列$\{Z_i\in A_i\}$收敛到$a$，于是，$a\in A$，即：$A$是闭的。

证(c) 设$\varepsilon>0$，存在N使当$m,n\geqslant N$时，

$$h_\rho(A_m,A_n)\leqslant\varepsilon$$

如果令$n\geqslant N$，则对$m\geqslant n$，$A_m\subset(A_n)\varepsilon$，设$a\in A$，则存在序列$\{a_i\in A_i\}$收敛到$a$，可设$N$充分大使得$n\geqslant N$时也有

$$\rho(a_m,a)<\varepsilon$$

由于$A_m\subset(A_n)_\varepsilon$，所以$a_m\in(A_n)\varepsilon$，又由于$A_n$是紧的，所以可以看出$\{A_n\}_\varepsilon$是闭的，因此，$\{a_m\}m\geqslant N$的极限点$a$也应属于$(A_n)_\varepsilon$，于是对充分大的$n$有$A\subset(A_n)_\varepsilon$

证(d) 设A不是有界的，则对某个$\varepsilon>0$，不存在有限的ε—网，则可以在A中找到序列$\{x_i\}i=1,2\cdots$，使

$$\rho(x_i,x_j)\geqslant\varepsilon\qquad i\neq j\tag{1.4.2}$$

由(c)，存在充分大的n使$A\subset(A_n)_{\frac{\varepsilon}{3}}$，$\forall x_i$，存在$y_i\in A_n$使$\rho(x_i,y_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，由$A_n$的紧性知存在$\{y_i\}(i=1,2\cdots)$子序列$\{y_{nk}\}k=1,2\cdots$收敛，因此，存在$y_{n_i},y_{n_j}\in\{y_{n_k}\}$使$\rho(y_{n_i},y_{n_j})<\frac{\varepsilon}{3}$，但

$$\rho(x_{n_i},x_{n_j})\leqslant\rho(x_{n_i},y_{n_i})+\rho(y_{n_i},y_{n_j})+\rho(y_{n_j},x_{n_i})$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

与式(1.4.2)矛盾，表明A是全有界的，因而，由(b)A是紧的。

证(e) 由(d)，$A\in\mathscr{H}(X)$，$\forall\varepsilon>0$，存在$N>0$，使$m,n\geqslant N$时，$h_\rho(A_m,A_n)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，即对$m,n\geqslant N$，$A_m\subset(A_m)_{\varepsilon/2}$。

对 $n \geqslant N$，存在正数序列 $N < N_1 < N_2 < \cdots$ 及 $m, k \geqslant N_i$，$A_m \subset (A_k)_{\varepsilon/2^{j+1}}$

令 $y \in A_n$，注意到 $A_n \subset (A_{N_1})_{\varepsilon/2}$，因而，存在 $x_{N_1} \in A_{N_1}$，使 $\rho(y, x_{N_1}) \leqslant \varepsilon/2$，又因为 $x_{N_1} \in A_{N_1}$，$A_{N_1} \subset (A_{N_2})_{\varepsilon/4}$，因而，存在 $x_{N_2} \in A_{N_2}$，使 $\rho(x_{N_1}, x_{N_2}) \leqslant \varepsilon/4$，用归纳法易知，存在序列 $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3} \cdots$ 使 $x_{N_j} \in A_{N_j}$ 和 $\rho(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) > \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$，利用多次三角不等式，可得

$$\rho(y, x_{N_j}) \leqslant \varepsilon, \quad j = 1, 2, \cdots$$

同时，$\{x_{N_j}\}$ $\quad j = 1, 2 \cdots$ 是哥西列，它的极限点 $x \in A$，由 $\rho(y, x_{N_j}) \leqslant \varepsilon$ 可知，$\rho(y, x) \leqslant \varepsilon$，即

$$A \subset A_\varepsilon, \quad n \geqslant N$$

故

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A$$

因此，$(\mathscr{H}(X), h_\rho)$是完备度量空间。

1.5 分形空间上的压缩映射

如果(X, ρ)是度量空间，则$(\mathscr{H}(X), h_\rho)$表示相应的带有豪斯道夫距离的非空紧子集空间，在本章第一节，我们避免给分形下明确的定义，其实，如果在讲解了分形空间之后，我们可以给确定性分形下一个数学定义，即它是分形空间$(\mathscr{H}(X), h_\rho)$上的压缩映射的不动点，但首先应先了解分形空间上的压缩映射的构造。

引理 1.5.1 设 $w: X \to X$ 是度量空间(X, ρ)上的连续映射，则由 $w(B) = \{w(x): x \in B\}$，$\forall B \in \mathscr{H}(X)$，定义的变换 w 把 $\mathscr{H}(X)$映到自身。

证明 设 S 是X 的非空紧子集，只要证 $w(S) = \{w(x), x \in S\}$是紧的，令$\{y_n = w(x_n)\}$是 $w(S)$中的无穷点集，则$\{x_n\}$也是 S 中的无穷点集，由 S 的紧性，存在子序列$\{x_{N_n}\}$收敛到点 $\tilde{x} \in S$，由 w 的连续性知，$\{y_n\}$的子序列$\{y_{N_n} = f(x_{N_n})\}$收敛到 $\tilde{y} = f(\tilde{x}) \in$

$w(S)$，所以，$w(S)$是紧的。

因为压缩映射是连续的，所以，压缩映射也把 $\mathscr{H}(X)$映射到自身，由此，我们可以构造$(\mathscr{H}(X), h_\rho)$上的压缩映射。

引理 1.5.2 设 $w, X \to X$ 是度量空间(X, ρ)上具有压缩比 c 的压缩映射，则由下式定义的 $w, \mathscr{H}(X) \to \mathscr{H}(X)$是$(\mathscr{H}(X), h_\rho)$上具有压缩比 c 的压缩映射

$$w(B) = \{w(x) \quad x \in B\} \qquad \forall B \in \mathscr{H}(X)$$

证明 由 $w: X \to X$ 是连续的，由引理 1，w 把 $\mathscr{H}(X)$映射到自身。

设 $A, B \in \mathscr{H}(X)$且 $h_\rho(A, B) = \delta$，即：对 $\forall x_i \in A$，由

$$\rho(x_i, B) = \min\{\rho(x, y): y \in B\} \leqslant \delta$$

于是，对任意 $y_1 \in w(A)$，存在 $x_1 \in A$，使 $y_1 = w(x_1)$，则

$$\begin{aligned}\rho(y_1, w(B)) &= \min\{\rho(y_1, y_2), y_2 \in w(B)\} \\ &\leqslant \min\{c\rho(x_1, x_2), x_2 \in B\} \\ &= c\min\{\rho(x_1, x_2), x_2 \in B\} \\ &\leqslant c\delta\end{aligned}$$

所以 $w(A) \subset (w(B))_{c\delta}$

同理 $w(B) \subset (w(A))_{c\delta}$

于是 $h_\rho(w(A), w(B)) \leqslant c\delta = ch_\rho(A, B)$

即，w 是 $\mathscr{H}(X)$上的压缩映射。

引理 1.5.3 设(X, ρ)是度量空间，对任意 $A, B, C, D \in \mathscr{H}(X)$，$h_\rho(A \cup B, C \cup D) \leqslant h_\rho(A, C) \vee h_\rho(B, D)$

证明 令 $\delta_1 = h_\rho(A, C) \vee h_\rho(B, D)$，$\forall \delta > \delta_1$ 有

$$A \subset C_\delta, C \subset A_\delta, B \subset D_\delta, D \subset B_\delta$$

所以
$$A \cup B \subset C_\delta \cup D_\delta = (C \cup D)_\delta$$

$$C \cup D \subset A_\delta \cup B_\delta = (A \cup B)_\delta，即：h_\rho(A \cup B, C \cup D) \leqslant \delta$$

所以
$$h_\rho(A \cup B, C \cup D) \leqslant \delta_1$$

定理 1.5.1 设(X, ρ)是度量空间，又设$\{w_n, n = 1, 2 \cdots N\}$是

$(\mathscr{H}(X),h_\rho)$上的一族压缩映射，相应于 w_n 的压缩比为 c_n，由下式定义 $W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$

$$W(B)=w_1(B)\cup w_2(B)\cup\cdots\cup w_N(B)=\bigcup_{i=1}^{N}w_i(B)$$

$\forall B\in\mathscr{H}(X)$

则 W 是具备压缩比为 $c=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{c_i\}$的压缩映射。

证明 因为有限个紧子集的并仍为紧子集所以 $W(B)\in\mathscr{H}(X)$，$\forall B\in\mathscr{H}(X)$，下面只对 $N=2$ 证明 W 的压缩性。

$\forall B,C\in\mathscr{H}(X)$

$$\begin{aligned}h_\rho(W(B),W(C))&=h_\rho(w_1(B)\cup w_2(B),w_1(C)\cup w_2(C))\\&\leqslant h_\rho(w_1(B),w_1(C)\vee h_\rho(w_2(B),\\&\quad w_2(C))\\&\leqslant c_1h_\rho(B,C)\vee c_2h_\rho(B,C)\\&\leqslant ch_\rho(B,C)\end{aligned}$$

所以，W 是$\mathscr{H}(X)$上的压缩映射。

由于定理 1.5.1 的证明，在空间$(\mathscr{H}(X),h_\rho)$上定义了一个重要的压缩变换 W，W 的不动点一定存在，这个不动点也称为 W 在$\mathscr{H}(X)$上的不变集，并且它一般都是分形。再详细的内容我们将在第 2 章介绍。

1.6 离散空间的分维

在前几节中，定义的分形及其维数都是在连续状态空间内考虑的，这些有关分形的叙述和结论都已经获得了广泛的承认，分形维数已经成为基本物理特征的一个重要指标。但是科学中特别是物理学中考虑的模型许多都定义在 d 维格子点 Z^d 上，比如渗流模型(Percolation)以及有限制的扩散凝聚模型(The diffusion-limited aggregation, DLA)其实都是离散空间中的典型例子。能否在离散空间上定义出具有分形性质的子集，这是许多物理学家特别关注的一个问题，因为这对解决许多物理问题会有很大的帮助。近年来，在国际上已

出现了几种在 Z^d 上定义分形集的方法，其中以 Taylor S.J. 见参考文献[13]定义的 Z^d 上的豪斯道夫维数最为合理，本节简要介绍这种离散空间上的分维。

设 A 是 d 维格子点 Z^d 的子集，记

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$$

对任意 $x \in Z^d$，$n \geqslant 1$，定义 Z^d 中的立方体

$$C(x,n) = \{y \in Z^d : x_i \leqslant y_i < x_i + n\}$$

$$V(x,n) = \left\{y \in Z^d : x_i - \frac{n}{2} \leqslant y_i < x_i + \frac{n}{2}\right\}$$

并且用 $\mathscr{C}$ 表示全体形如 $C(x,n)$ 的立方体，即

$$\mathscr{C} = \{C(x,n) : x \in Z^d, n \geqslant 1\}$$

对于集合 A，还可以定义它的边长为

$$S(A) = \min\{r : A \subset C(x,r), x \in Z^d\}$$

对 $n \geqslant 0$，记

$$V_n = V(0, 2^n)$$

和 $S_1 = V \qquad S_n = \dfrac{V_n}{V_{n-1}} \qquad (n \geqslant 2)$

定义 1.6.1 称函数 $h:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为测度函数，如果 h 连续且单调增加，并且存在常数 $k_h < \infty$，使

$$h(2t) \leqslant k_h h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$$

记 $\mathscr{H}$ 为测度函数的全体，对 $\forall A \subset Z^d$，$\forall h \in \mathscr{H}$，令

$$\gamma_h(A, S_n) = \min\left\{\sum_{i=1}^{m} h\left(\frac{S(B_i)}{S(S_n)}\right), B_i \in \mathscr{C}, A \cap S_n \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i\right\} \tag{1.6.1}$$

$$m_h(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_h(A, S_n) \tag{1.6.2}$$

如果取测度函数 $h(x) = x^\alpha$，则记式(1.6.1)中的 γ_h 为 γ_α，记 m_h 为 m_α。

定义 1.6.2 如果 A 是 Z^d 的任一子集。则 A 的离散豪斯道夫维数 $\dim_H A$ 定义为：

$$\dim_H A = \inf\{\alpha : m_\alpha(A) < \infty\} \tag{1.6.3}$$

定义 1.6.3 $A \subset Z^d$，称下两式定义的数分别为集 A 的上、下质量维数

$$\dim_{LM} A = \liminf_{n \to \infty} \frac{\log \#(A \cap V(0, n))}{\log n} \tag{1.6.4}$$

$$\dim_{UM} A = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \#(A \cap V(0, n))}{\log n} \tag{1.6.5}$$

如果式(1.6.4)与式(1.6.5)的值相等，则称这个数值为集 A 的质量维数，记为 $\dim_M A$。

定义 1.6.3 中定义的质量维数与连续空间中的盒维数是可以类比的，它们有许多相似的性质。下面介绍定义 1.6.2 中的离散豪斯道夫维数的性质，读者很快就可以发现，它的性质与连续空间的豪斯道夫维数有许多相似之处。

性质 1.6.1 如果 $\alpha \leqslant \beta$，则 $m_\alpha(A) \geqslant m_\beta(A)$，所以对于 $\theta < \dim_H A$，有 $m_\theta(A) = \infty$；而如果 $\theta > \dim_H A$ 则 $m_\theta(A) < \infty$。

性质 1.6.2 如果 A 为有限点集，则对充分大的 n，$A \cap S_n = \emptyset$，所以 $\gamma_n(A, S_n) = 0$，所以对任何 $h \in \mathscr{H}$，$m_h(A) < \infty$，因此，$\dim_H A = 0$。

性质 1.6.3 记 $a_n = \#(A \cap V(0, 2^n))$，用边长为 1 的立方体来覆盖 $A \cap S_n$，则有：

$$\gamma_h(A, S_n) \leqslant a_n h(2^{-n})$$

所以如果取 $h(x) = x^\beta$，当 $\beta > \dim_{UM} A$，就有 $m_h(A) < \infty$，即：$\dim_H A \leqslant \dim_{UM} A$，因此显然有：$\dim_H A \leqslant d$，对任意 $A \subset Z^d$ 成立。

性质 1.6.4 $\dim_H(A \cup B) = (\dim_H A) \vee (\dim_H B)$。因为如果 $\alpha > (\dim_H A) \vee (\dim_H B)$，注意到，

$$\gamma_\alpha(A \cup B, S_n) \leqslant \gamma_\alpha(A, S_n) + \gamma_\alpha(B, S_n)$$

所以有 $$\alpha \geqslant \dim_H(A \cup B)。$$

还可以列举出来另一些与连续情形的分维类似的性质，但因为还有涉及更多的符号和文献，这里就不再详叙了。应当知道的是，由于离散空间与连续空间的区别，使得定义 2 定义的离散豪斯道夫维数与连续情形维数的性质有较大的差别，比如在分形的投影性质上，离散分形投影的维数甚至可能大于原集合的维数。但是，这并不影响离散空间的分形维数已经在应用上发挥了相当大作用。比如，Z^d 上的简单随机游动，用 A 表示游动的值域，则当 $\dim_H A > d-2$，游动为常返的；而当 $\dim_H A < d-2$，游动是非常返的。Taylor S.J 证明了，α一严格稳定的随机游动的值域是 $\dim_H A = \alpha$ 的分形，我们同时也证明了，对一般稳定随机游动。这个结论也是正确的。

2 迭代函数系(IFS)与动力系统

随着大功率计算机的应用,人们对动力系统的兴趣也迅速增长,动力系统的研究,已形成了被世人公认的庞大的数学分支,并已获得了丰富的研究成果。现在动力系统已被用来作为生物学、地理学、以及经济学中的一些现象的模型。这一章中,我们并不想全面讲述动力系统的基本理论,也不可能介绍动力系统的各具特色的领域,而只是从映射的角度分析动力系统中可能发生的各种形式的分形,并试图从中总结出用计算机绘制这种分形图的原理与算法。

迭代函数系与动力系统是不可分的,它们是一个问题的两个方面,实际上,在一定的条件下,迭代函数系中的变换是相应动力系统中变换的逆变换。

我们先从迭代函数系的概念讲起。

2.1 迭代函数系(IFS)

定义 2.1.1 度量空间(X,ρ)与定义在其上的一有限个的压缩映射族 $w_n: X\to X$, $n=1,2\cdots,N$,组成一(双曲)迭代函数系,用 IFS 表示它,记为:$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$;如果 w_n 的压缩比为 c_n, $n=1,2,\cdots,N$,则称 $c=\max\{c_n, n=1,2,\cdots,N\}$为此 IFS 的压缩比。

把压缩映射原理应用到完备度量空间$(\mathscr{H}(X),h_\rho)$上,可以得到在分形空间上的一个压缩映射原理:

定理 2.1.1 设$\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$是完备度量空间$(X,\rho)$上的(双曲)IFS,压缩比为 c,变换 $W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$由下式定义:

$$W(B)=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(B) \qquad \forall B\in\mathscr{H}(X)$$

则 W 是$(\mathscr{H}(X),h_\rho)$上,压缩比为 c 的压缩映射,即

$h_\rho(W(B),W(C))\leqslant c\, h_\rho(B,C)$, $\qquad \forall B,C\in\mathscr{H}(X)$且存在

惟一的不动点(不变集)$A\in\mathscr{H}(X)$,满足

$$A=W(A)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A)$$

并且对任意 $B\in\mathscr{H}(X)$

$$A=\lim_{n\to\infty}W^n(B)$$

定义 2.1.2 定理1中 IFS 的不动点 $A\in\mathscr{H}(X)$称为这个 IFS 的吸引子。

IFS 的吸引子一般都是分形,称为确定性分形,而有趣、奇特的分形又称为奇异吸引子。

例 2.1.1 考虑度量空间$(\boldsymbol{R},\rho_E)$及其上的变换 $w_1(x)=\frac{1}{3}x$,$w_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$,这两个变换都是压缩比为 1/3 的压缩变换,于是$(\boldsymbol{R},w_1,w_2)$是 $N=2$ 的(双曲)IFS

令 $W(B)=w_1(B)\cup w_2(B) \qquad B\in\mathscr{H}(X)$

如果取 $E_0=[0,1]\in\mathscr{H}(X)$,令 $E_n=W^n(E_0)$,则易见

$$E_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$$

$$E_2=\left[0,\frac{1}{3^2}\right]\cup\left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right]\cup\left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right]\cup\left[\frac{8}{3^2},1\right]$$

$$\cdots$$

$$E_k=\left[0,\frac{1}{3^k}\right]\cup\left[\frac{2}{3^k},\frac{3}{3^k}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{3^k-3}{3^k},\frac{3^k-2}{3^k}\right]\cup\left[\frac{3^k-1}{3^k},1\right]$$

且

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}W^n(E_0)=A$$

由定理 2.1.1,这个(双曲)IFS 的吸引子就是不动点 A,它还满足

$$A=W(A)=w_1(A)\cup w_2(A)$$

A 也称为 W 的不变集。图 2.1.1 就是吸引子 A 的示意图,实际上它是读者早已熟悉的三分康托集,也是一种最基本的自相似分形。

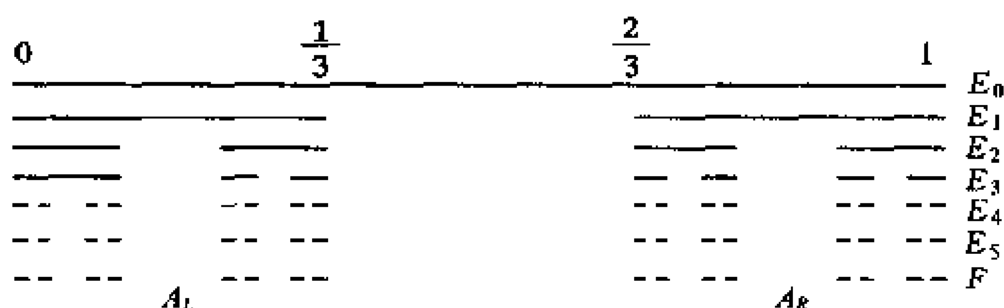


图 2.1.1　IFS$\{R; w_1(x)=x/3, w_2(x)=(x+2)/3\}$的吸引子—三分康托集

还有另外一种构造$\mathscr{H}(X)$上的压缩映射的方法：

定义 2.1.3　设$\{X,\rho\}$是完备度量空间，$C\in\mathscr{H}(X)$，定义变换$w_0:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$使

$$w_0(B)=C \qquad \forall B\in\mathscr{H}(X)$$

则称为w_0为$\mathscr{H}(X)$上的凝聚映射，而集 C 称为相应于凝聚映射w_0的凝聚集。

定义 2.1.4　设$\{X, w_1, w_2, \cdots, w_n\}$是压缩比为$0\leqslant c<1$的双曲 IFS，$w_0:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$是凝聚映射，则称$\{X, w_0, w_1, \cdots, w_N\}$为带凝聚的，压缩比为 c 的双曲 IFS。

带凝聚的 IFS 与不带凝聚的 IFS 本质上并无什么区别，定理 2.1.1 只要稍加修改，就可以适合于带凝聚的双曲 IFS：

定理 2.1.1′　设$\{X, w_n: n=0,1,\cdots,N\}$是完备度量空间上的压缩比为 c 且带凝聚的双曲 IFS，变换 $W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$由下式定义

$$W(B)=\bigcup_{n=0}^{N}w_n(B) \qquad \forall B\in\mathscr{H}(X)$$

则 W 是完备度量空间$(\mathscr{H}(X), h_\rho)$上带有压缩比为 c 的压缩映射，即

$$h_\rho(W(B), W(C))\leqslant c\, h_\rho(B,C),\ \forall B,C\in\mathscr{H}(X)$$

且存在惟一的不动点 $A\in\mathscr{H}(X)$，使

$$A=W(A)=\bigcup_{n=0}^{N}w_n(A)$$

同时有

$$\lim_{n\to\infty}W^n(B)=A \qquad \forall B\in\mathscr{H}(X)$$

例 2.1.2　图2.1.2表示的是一分形树，它是带凝聚的 IFS($\boldsymbol{R}^2$,

w_0, w_1, w_2)的分形吸引子，其中 w_0 是凝聚集为纵坐标轴上 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 的一段的凝聚映射，而 w_1 和 w_2 由下两式表示：

$$w_1(x, y) = (xr\cos\theta + yr\sin\theta, xr\sin\theta + yr\cos\theta + 1)$$

$$w_2(x, y) = (xr\cos\theta - yr\sin\theta, xr\sin\theta + yr\cos\theta + 1)$$

$$(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$$

读者容易验证，如果令：

$$W(B) = \bigcup_{n=0}^{2} w_n(B)$$

则 W 的不动点正好为图 2.1.2 所示的分形树 A，并且，$\forall B \in \mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)$，都有

$$\lim_{n \to \infty} W^n(B) = A$$

例 2.1.3 设(X, ρ)是完备度量空间，$\{X, w_0, w_1, \cdots, w_N\}$是带凝聚的 IFS，凝聚集为 $C \in \mathscr{H}(X)$，可以将带凝聚的 IFS 的吸引子 A 用凝聚集 C 表出。

实际上，$\forall B \in \mathscr{H}(B)$，令

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B)$$

$$W_0(B) = \bigcup_{n=0}^{N} w_n(B) = w_0(B) \cup W(B)$$

由定理 2.1.1′，IFS 的吸引子 $A = \lim\limits_{n \to \infty} W_0^n(C)$，

而
$$W_0(C) = w_0(C) \cup W(C) = C \cup W(C)$$

$$\begin{aligned} W_0^2(C) &= W_0(C \cup W(C)) \\ &= w_0(C \cup W(C)) \cup W(C \cup W(C)) \\ &= C \cup W(C) \cup W^2(C) \end{aligned}$$

用归纳法容易证明，对任意整数

$$W_0^n(C) = C \cup W(C) \cup \cdots \cup W^n(C)$$

所以

$$A = \lim_{n \to \infty} W_0^n(C) = \bigcup_{n=0}^{\infty} W^n(C)$$

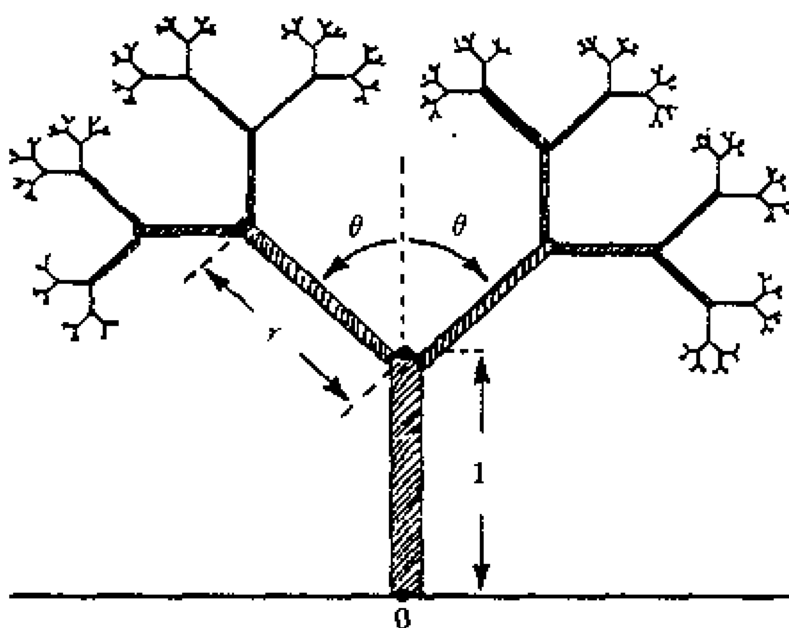


图 2.1.2 例 2 中带凝聚的 IFS 的吸引子,分形树 A 的草图

其中 W^0 表示单位映射。

利用定理 2.1.1 和定理 2.1.1′提供的不变集的原理,可以建立绘制 IFS 的分形吸引子的图像的两种算法,(1)确定性算法及(2)随机迭代法,它的原理及具体做法将在第 5 章介绍。

从定理 2.1.1 及定理 2.1.1′已可以看出,由几个压缩映射组成的 IFS 可以确定“复杂”的集——分形吸引子,它们一般是很优美的分形。因此我们希望了解什么样的图形可以表成 IFS 的不变集,或者由这样的集来近似,同时也希望了解如何能找到可以对给定的实物图像提供较好的表现的 IFS。如果这些想法能实现,对一个复杂的图像,就能用带有少量参数的若干压缩映射来描述,那么对复杂信息资料的压缩,对各种奇特图形的有效贮存和传输就有极其重大的意义。

下面的定理称为拼贴定理,对于一类压缩变换,它给出了衡量一个集与相应不变集的近似程度的一种方法

定理 2.1.2 设(X,ρ)是完备度量空间,$\{X,(w_0),w_1,\cdots,w_N\}$是压缩比为 c 的 IFS(可带凝聚的 IFS),它的不动点(不变集)是 A,则

$$h_\rho(E,A)\leqslant(1-c)^{-1}h_\rho\left(E,\bigcup_{\substack{n=1\\(\text{或}n=0)}}^{N}w_n(E)\right)\qquad\forall E\in\mathscr{H}(X)$$

证明 只对不带凝聚的 IFS 证明,对带凝聚的 IFS 可同样证明。

由于 A 是不变集,所以

$$A=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A)$$

于是 $$h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E),A\right)=h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E),\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A)\right)$$

如果对每个 n,δ 平行体$(w_n(E))_\delta$ 包含 $w_n(A)$,则$\left(\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E)\right)_\delta$ 也包含$\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A)$,由豪斯道夫距离的定义

$$\begin{aligned}h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E),A\right)&=h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E),\bigcup_{n=1}^{N}w_n(A)\right)\\&\leqslant\max_{1\leqslant n\leqslant N}h_\rho(w_n(E),w_n(A))\\&\leqslant\max_{1\leqslant n\leqslant N}c_nh_\rho(E,A)\\&=ch_\rho(E,A)\end{aligned}$$

于是由豪斯道夫距离的三角不等式

$$\begin{aligned}h_\rho(E,A)&\leqslant h_\rho\left(E,\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E)\right)+h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E),A\right)\\&\leqslant h_\rho\left(E,\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E)\right)+ch_\rho(E,A)\end{aligned}$$

即得 $h_\rho(E,A)\leqslant(1-c)^{-1}h_\rho\left(E,\bigcup_{n=1}^{N}w_n(E)\right)$

定理得证。

定理 2.1.2 告诉我们,为找到一个 IFS 使它的吸引子与某个给定的集相等或相似,就必需设法找到一族压缩变换,使给定集在变换下象集的并(拼贴)与给定集相等或近似。

下面的例子是对拼贴定理的一个简单的说明

例 2.1.4 设 w_1,w_2 由下面两式定义

$w_1(x)=ax+b,w_2(x)=cx+d,\forall x\in\boldsymbol{R}$,其中,$a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$。

比如说,给定一个简单的集合 $E=[0,1]$是 0 到 1 的闭区间,如

何调整系数 a,b,c,d，使 IFS(R,w_1,w_2)的吸引子 A 与之相近？设取

$$w_1(x)=0.51x-0.01,\ w_2(x)=0.47x+0.53$$

由于使$[0,1]\subset([-0.01,0.5]\cup[0.53,1])_\delta$ 的最小δ 为 0.015，所以由豪斯道夫距离的定义，即有

$$\begin{aligned} & h_E([0.1],\bigcup_{i=1}^{2}w_i([0,1])) \\ & \doteq h_E([0,1],[-0.01,0.5]\cup[0.53,1]) \\ & =0.015 \end{aligned}$$

压缩比 $c=\max(0.51,0.49)=0.51$，所以利用拼贴定理

$$h_E([0,1],A)\leqslant 0.015'\times(1-0.51)^{-1}<0.0312$$

在一定意义下，可以说，$E=[0,1]$与 IFS$\{R,w_1,w_2\}$的吸引子 A 相当接近。

下面一系列结果建立了双曲 IFS 的吸引子对组成 IFS 的变换中的参数的连续依赖关系。

引理 2.1.1 设(P,ρ_p)，(X,ρ)是度量空间，后一个空间是完备的，

$$w:P\times X\to X$$

是压缩比为 $0\leqslant c<1$ 的压缩映射族，即

$\forall_p\in P$，$w_p(\cdot)$是 X 上的压缩映射。固定 $x\in X$，$w.(x)$在 P 上连续，则 w 的不动点对 p 是连续的，即

$$x_f(p):P\to X \text{ 是连续的。}$$

证明 固定 $p\in P$，$x_f(p)$表示 w_p 的不动点，$\varepsilon>0$ 固定，对任意 $q\in P$，

$$\begin{aligned} \rho(x_f(p),x_f(q)) &= \rho(w_p(x_f(p)),w_q(x_f(q))) \\ &\leqslant \rho(w_p(x_f(p)),w_q(x_f(p)))+ \\ &\quad\ \rho(w_q(x_f(p)),w_q(x_f(q))) \\ &\leqslant \rho(w_p(x_f(p)),w_q(x_f(p)))+ \\ &\quad\ c\rho(x_f(p),x_f(p) \end{aligned}$$

即 $\rho(x_f(p),x_f(q))\leqslant(1-c)^{-1}\rho(w_p(x_f(p)),w_q(x_f(p)))$由于对固定的 x，$w_p(x)$在 P 上连续，所以只要 q 充分接近 p，右边的值可以任意小，于是引理获证。

引理 2.1.2 设(X,ρ)是度量空间，且连续映射 $w_n:X\to X(n=1,2,\cdots,N)$连续依赖于参数 $p\in P$，(这里(P,ρ_p)是紧度量空间)，即对固定的 $x\in X$，$w_n(p,x)$是 p 的连续函数，则由下式定义的变换 $W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$

$$\mathbf{W}_p(B)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(p,B)\qquad\forall B\in\mathscr{H}(X)$$

对 p 连续，即在度量空间$(\mathscr{H}(X),h_\rho)$上，对$\forall B\in\mathscr{H}(X)$，$W(p,B)$是 p 的连续函数。

证明 只需对 $N=1$ 的情形证明，再由引理 1.5.3，很容易把结果推广到 N 是任意有限整数的情形。

由于 $w_1:X\to X$ 是连续的，所以对任意固定的 $q\in P$，有 $\delta_1>0$，只要

$$\rho(x,y)<\delta_1$$

则
$$\rho(w_1(q,x),w_1(q,y))<\varepsilon/2$$

对任意 $B\in\mathscr{H}(X)$，由于 $P\times B$ 是紧的，同时由于 $w_1:P\times B\to X$ 连续，所以 w_1 是一致连续的，即对所有的 $x\in B$，只要 $\rho_p(p,q)<\delta_2$，就有：$\rho(w_1(p,x),w_2(q,x))<\varepsilon/2$

因此，对$\forall z_1\in w_1(p,B)$，存在 $x\in B$，使

$$z_1=w_1(p,x)$$

取 $y\in B$，使

则
$$\begin{aligned}&\rho(w_1(p,x),w(q,y))\\&\leqslant\rho(w_1(p,x),w_1(q,x))+\rho(w_1(q,x),w_1(q,y))\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

只要
$$\rho_p(p,q)<\delta_2$$

所以
$$w_1(p,B)\subset(w_1(q,B))_\varepsilon$$

同理可证

$$w_1(q,B)\subset(w_1(p,B))_\varepsilon$$

即

$$h_\rho(w_1(q,B),w_1(p,B))\leqslant\varepsilon$$

所以 $w_1(p,B)$是 p 的连续函数,引理证毕。

由引理 2.1.1 和引理 2.1.2,立即可以得到下面的定理

定理 2.1.3 设(X,ρ)是度量空间,$\{X,(w_0),w_1,\cdots,w_N\}$是(带凝聚的)IFS,压缩比为 c, $w_n,n=1,2,\cdots,N$ 对参数 $p\in P$ 是连续的,这里 P 是紧度量空间,则 IFS 的吸引子 $A(p)\in\mathscr{H}(X)$相对于豪斯道夫距离 h_ρ 对 $p\in P$ 连续。

定理 2.1.2 说明对双曲型 IFS,参数的小的变化也只会引起相应吸引子的小的变化。所以这个定理是非常重要的,因为在图像资料信息的压缩中,我们可以调整变换参数达到连续的控制 IFS 的吸引子的目的,同时也使我们能平滑地在吸引子间插值,这对图像的计算机模拟也是相当有用的。

2.2 编码空间与 IFS

在分析 IFS 作用之下,分形是如何产生的这个问题中,编码空间起了很重要的作用。这一节主要介绍编码空间的一些概念,并且定义一个从编码空间到 IFS 所对应的分形上的一个连续变换。

定义 2.2.1 设$\Sigma=\{x:x=x_1x_2,\cdots,\forall i,x_i\in\{0,1,\cdots,N-1\}\}$其中 N 是任一正整数,并且在Σ上定义度量

$$\rho_c(x,y)=\rho_c(x_1x_2\cdots,y_1y_2\cdots)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{(N+1)^i}$$

容易验证 ρ_c 是空间Σ上的一个度量,称(Σ,ρ_c)为N 个数码的编码空间。

显然,当 $N\geqslant2$ 时,Σ中的元素是不可数的。

定义 2.2.2 设$\{X,w_1\cdots w_N\}$是一个双曲型 IFS,则 N 个数码的编码空间(Σ,ρ_c)称为相应于此双曲 IFS 的编码空间。

为了定义从编码空间到分形上的连续变换，需要以下两个引理，第一个引理说明，在完备度量空间上的 IFS，可以限制在某个令人感兴趣的紧子集上。

引理 2.2.1 $\{X, w_n, n=1,2,\cdots,N\}$ 是完备度量空间 (X,ρ) 上的双曲型 IFS，设 $K\in\mathscr{H}(X)$，则 $\exists\,\widetilde{K}\in\mathscr{H}(X)$ 使 $K\subset\widetilde{K}$，且 $w_n:\widetilde{K}\to\widetilde{K}$，$n=1,2,\cdots,N$，即 $\{\widetilde{K}, w_n, n=1,2,\cdots,N\}$ 是一个紧空间上的双曲 IFS。

证明 由下式定义 $W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$

$$W(B)=\bigcup_{n=1}^{N}w_n(B)\qquad\forall\,B\in\mathscr{H}(X)$$

定义凝取变换 $w_0:X\to X$，使

$$w_0(B)=K\qquad\forall\,B\in\mathscr{H}(X)$$

则 $\{X: w_0, w_1,\cdots,w_N\}$ 是带凝聚的 IFS，由例 2.1.3，知这个 IFS 的吸引子 $\widetilde{K}$ 可以表成

$$\widetilde{K}=\lim_{n\to\infty}(K\cup W(K)\cup W^2(K)\cup\cdots\cup W^n(K))$$

这里 $W(K)=\bigcup\limits_{n=1}^{N}w_n(K)$。

由定理 2.1.1′，知 $\widetilde{K}\supset K$，且 $\widetilde{K}\subset\mathscr{H}(X)$。

并且 $\widetilde{K}$ 是不动点，即

$$W(\widetilde{K})\subset\bigcup_{n=0}^{N}w_n(\widetilde{K})=\widetilde{K}$$

引理得证。

引理 2.2.2 设 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$ 是完备度量空间 (X,ρ) 上的压缩比为 c 的双曲型 IFS，(Σ,ρ_c) 是此 IFS 相应的编码空间，对任意的 $\sigma\in\Sigma$，$n\in N$，及 $x\in X$，令

$$\Phi(\sigma,n,x)=w_{\sigma_1}\circ w_{\sigma_2}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n}(x)$$

K 表示 X 的非空紧子集，则存在实常数 D，使对任意 $\sigma\in\Sigma$，$m,n\in N$，$x_1,x_2\in K$

$$\rho(\Phi(\sigma,m,x_1),\Phi(\sigma,n,x_2))\leqslant Dc^{m\wedge n}\qquad(2.2.1)$$

证明 设 σ, m, n, x_1, x_2 如引理中所说明的，无妨设 $m<n$，则由 $\Phi(\sigma, n, \cdot)$ 的定义，易见

$$\Phi(\sigma, n, x_2)=\Phi(\sigma, m, \Phi(\omega, n-m, x_2))$$

其中 $$\omega=\sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\cdots\sigma_n\cdots\in\Sigma$$

令 $$x_3=\Phi(w, n-m, x_2)$$

如引理 2.2.1 那样构造 $\widetilde{K}$，则 $x_3\in\widetilde{K}$，因此

$$\begin{aligned}
&\rho(\Phi(\sigma, m, x_1), \Phi(\sigma, n, x_2))\\
&=\rho(\Phi(\sigma, m, x_1), \Phi(\sigma, m, x_3))\\
&\leqslant c\rho(w_{\sigma_2}\circ\cdots\circ w_{\sigma_m}(x_1), w_{\sigma_2}\circ\cdots\circ w_{\sigma_m}(x_3))\\
&\leqslant c^2\rho(w_{\sigma_3}\circ\cdots\circ w_{\sigma_m}(x_1), w_{\sigma_3}\circ\cdots\circ w_{\sigma_m}(x_3))\\
&\leqslant c^m\rho(x_1, x_3)\leqslant c^m D
\end{aligned}$$

其中 $D=\max\{\rho(x_1, x_3), x_1, x_3\in\widetilde{K}\}$，由于 $\widetilde{K}$ 是紧的，因此 D 是有限的。

引理证毕。

定理 2.2.1 设 $\{X: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$ 是完备度量空间 (X, ρ) 上的双曲型 IFS，相应的编码空间是 (Σ, ρ_c)，此 IFS 的吸引子为 A，对任意的 $\sigma\in\Sigma$，$n\in N$，$x\in X$，记

$$\Phi(\sigma, n, x)=w_{\sigma_1}\circ w_{\sigma_2}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n}(x)$$

则 $$\Phi(\sigma)=\lim_{n\to\infty}\Phi(\sigma, n, x)$$

存在，且 $\Phi(\sigma)\in A$，与初始点 x 无关，如果 $K\in\mathscr{H}(X)$，则收敛对 $x\in K$ 是一致的，因此函数 $\Phi: \Sigma\to A$，是连续且满的(映上的)。

证明 设 $x\in X$，$K\in\mathscr{H}(X)$，且使 $x\in K$，按引理 2.2.1 的方法构造 $\widetilde{K}$，$W: \mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$，按通常方法定义，由定理 2.1.1 知 W 是 $(\mathscr{H}(X), h_\rho)$ 上的压缩映射，且相应的不变集

$$A=\lim_{n\to\infty}W^n(K)$$

因此 $\{W^n(K)\}$ 是 $(\mathscr{H}(X), h_\rho)$ 上的哥西列，且有 $\Phi(\sigma, n, x)\in W^n(K)$，因此由定理 1.4.1，如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi(\sigma, n, x)$ 存在，则它一

定属于吸引子 A。

由引理 2.2.2 知 $\{\Phi(\sigma, n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是哥西列，所以由空间 (X, ρ) 的完备性知道

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\sigma, n, x)=\Phi(\sigma)\text{存在},$$

收敛的一致性是由于在式(2.2.1)中，D 的选择与 $x\in K$ 无关。

下面证明 $\Phi(\sigma): \Sigma\to A$ 是连续的，任意的 $\varepsilon>0$，选择 n 充分大使 $c^n D<\varepsilon$，选择 σ, ω 使它们的前 n 个数码都相等，即

$$\rho_c(\sigma, \omega)\leqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{N}{(N+1)^m}=\frac{1}{(N+1)^n}$$

因此，对任意 $m\geqslant n$，

$$\begin{aligned}&\rho(\Phi(\sigma, m, x), \Phi(\omega, m, x))\\&=\rho(\Phi(\sigma, n, \Phi(\sigma', m-n, x)))\cdot\\&\quad\Phi(\omega, n, \Phi(\omega', m-n, x))\end{aligned}$$

其

$$\sigma'=\sigma_{n+1}\cdots\sigma_m\cdots\in\Sigma$$

$$\omega'=\omega_{n+1}\cdots\omega_m\cdots\in\Sigma$$

由于 σ, ω 前 n 个数码是相等的，如果记

$$\Phi(\sigma', m-n, x)=x_1, \Phi(\omega', m-n, x)=x_2$$

则有

$$\begin{aligned}&\rho(\Phi(\sigma, m, x), \Phi(\omega, m, x))\\&=\rho(\Phi(\sigma, n, x_1), \Phi(\sigma, n, x_2))\end{aligned}$$

且由引理 2.2.1，知 $x_1, x_2\in\widetilde{K}$，令 $m\to\infty$，取极限，即得

$$\rho(\Phi(\sigma), \Phi(\omega))<\varepsilon$$

最后证明 $\Phi: \Sigma\to A$ 是满射(映上的)，任意 $a\in A$，由于 $A=\lim\limits_{n\to\infty}W^n(\{x\})$，而且 $W^n(\{x\})$ 中的点都能表成 $\Phi(\sigma, n, x)$ 的形式。由定理 1.4.1，存在 Σ 中的点列 $\omega^{(n)}=1, 2, \cdots$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\omega^{(n)}, n, x)=a$$

由空间 (Σ, ρ_c) 的紧性，点列 $\omega^{(n)}$，$n=1, 2, \cdots$ 存在收敛的子列收敛到某 $\omega\in\Sigma$，不失一般性，无妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega^{(n)}=\omega$

则如果设 $\alpha(n)=\#\{j\in N:\omega_k^{(n)}=\omega_k,1\leqslant k<j\}$，其中 N 是自然数集$\{1,2,\cdots\}$。则显然有

$$\alpha(n)\to\infty \qquad (n\to\infty)$$

于是 $\rho(\Phi(\omega,n,x),\Phi(\omega^{(n)},n,x))\leqslant c^{\alpha(n)}D$

令 $n\to\infty$，即有

$$\rho(\Phi(\omega),a)=0$$

所以　$\Phi(\omega)=a$，定理获证。

定义 2.2.3　设$\{X,\omega_n,n=1,2,\cdots,N\}$是双曲 IFS，相应的编码空间是$(\Sigma,\rho_c)$，$\Phi:\Sigma\to A$ 是定理 1 中定义的从编码空间到 IFS 吸引子间的连续函数，则吸引子上点 $a\in A$ 的地址定义为下面集合中的任一元素

$$\Phi^{-1}(a)=\{\sigma\in\Sigma:\Phi(\sigma)=a\}$$

$\Phi^{-1}(a)$称为点 $a\in A$ 的地址集，如果任一 $a\in A$，只有惟一的地址，即

$$\Phi^{-1}(a)=\{\sigma\} \qquad \forall a\in A$$

是单点集，则称 IFS 是全不连通的；称 IFS 为刚触及的，如果它不是全不连通的，并且存在一个非空开集 $V\subset X$，使：

$$(\text{i})\quad \omega_i(V)\cap w_j(V)=\varnothing$$

$$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,N\},i\neq j$$

$$(\text{ii})\quad \bigcup_{i=1}^{N}w_i(V)\subset V$$

成立。

条件(i)，(ii)称为开集条件。

如果一个 IFS 既不是全不连通的，也不是刚触及的，就称此 IFS 是重叠的。

定理 2.2.2　设$\{X,w_n,n=1,2,\cdots,N\}$是一个 $w_n(n=1,2,\cdots,N)$都是可逆的双曲 IFS，它的吸引子是 A，则 IFS 是全不连通的，当且仅当

$$w_i(A)\cap w_j(A)=\varnothing \tag{2.2.3}$$

$$\forall i \neq j, \quad i, j, \in \{1, 2, \cdots, N\}$$

证明 如果 IFS 是全不连通的，假设有 $i \neq j$，使 $w_i(A) \cap w_j(A) \neq \varnothing$，即存在 $x \in w_i(A) \cap w_j(A)$，但因 w_i, w_j 可逆，所以分别存在 $y, z \in A$，使 $x = w_i(y) = w_j(z)$，设 y, z 的地址分别为 σ 和 ω，则 x 可以表成两个不同的地址，$i\sigma$ 和 $j\omega (i \neq j)$，这是与 IFS 是全不连通的矛盾，所以 $\forall i \neq j$, $w_i(A) \cap w_j(A) = \varnothing$。

反之设式(2.2.3)成立，如果 IFS 不是全不连通的，则 A 中的某些点会具有两个不同的地址，设 x 是有两个地址的点，表成：

$$\sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1} \cdots \text{和 } \sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma'_{n+1} \cdots$$

不同地址会在某个数码上首次不同，其中 σ_{n+1} 和 σ'_{n+1} 是第一个不一致的数码，设 $\sigma_{n+1} = i$, $\sigma'_{n+1} = j$，则如果记

$$\begin{aligned} y &= w_i(w_{\sigma_{n+1}}^{-1} w_{\sigma_n}^{-1} \cdots w_{\sigma_1}^{-1}(x)) \\ &= w_j(w_{\sigma'_{n+1}}^{-1} w_{\sigma_n}^{-1} \cdots w_{\sigma_1}^{-1}(x)) \end{aligned}$$

有

$$y \in w_i(A) \cap w_j(A) \neq \varnothing$$

与式(2.2.3)矛盾。定理证毕。

下面几个例题是对定义 2.2.3 和定理 2.2.2 的说明

例 2.2.1 $\{[0,1], w_1(x) = x/3, w_2(x) = (x+2)/3\}$ 是 w_1, w_2 都可逆的双曲 IFS，可以看出这个 IFS 及其吸引子 A 是全不连通的。因为

任意 $x \in w_1(A)$ 都有 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$

$x \in w_2(A)$ 都有 $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1$

所以 $w_1(A) \cap w_2(A) = \varnothing$，式 2.2.3 成立。即 IFS 是全不连通的。从例 2.1.1 及图 2.1.1 已知，A 是三分康托集，A 也是全不连通的。

例 2.2.2 $\{R, w_1(x) = x/2, w_2(x) = (x+1)/2\}$ 也是 w_2, w_2 都可逆的 IFS，如果令 $A = [0,1]$，显然有：

$$w_1(A) \cup w_2(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] = [0, 1] = A$$

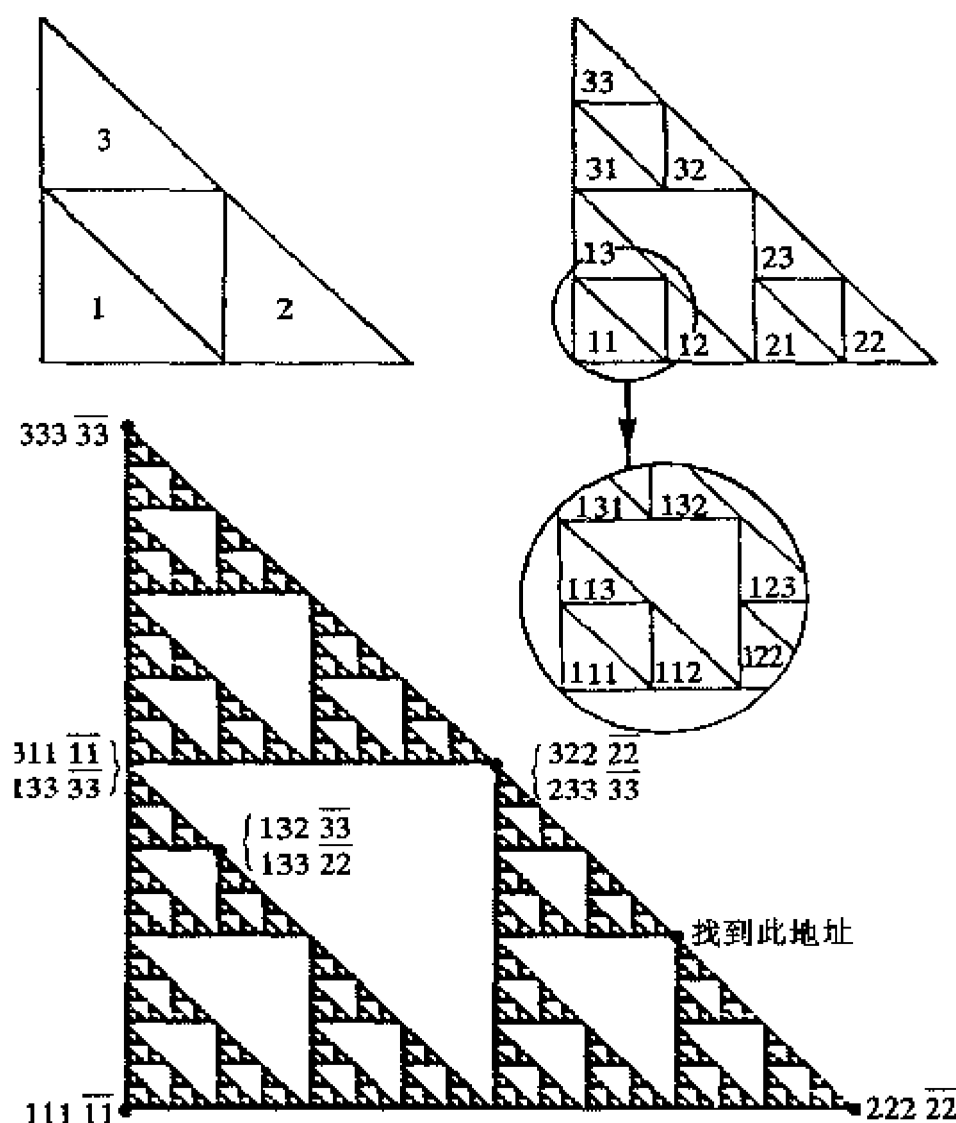


图 2.2.1　IFS$\{C, z/2, (z+1)/2, (z+i)/2\}$的吸引子 Sierpinski 三角形的图像，图中一些点有两个地址，相应的 IFS 是刚触及的

所以 A 是不动点，即 IFS 的吸引子。但

$$w_1(A)\cap w_2(A)=\left\{\frac{1}{2}\right\}\neq\varnothing$$

所以 IFS 不是全不连通的，但如果取 $V=(0,1)$，则有：

$$w_1(V)\cap w_2(V)=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap\left(\frac{1}{2},1\right)=\varnothing$$

且
$$w_1(V)\cup w_2(V)=\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\subset V$$

因此此 IFS 是刚触及的。

例 2.2.3 考虑 IFS$\{C, w_1(z)=z/2, w_2(z)=(z+1)/2, w_3(z)=(z+i)/2\}$,容易验证这个 IFS 的吸引子是例 1.3.1 提到的 Sierpinski 三角形。它的地址图如图 2.2.2 所示(图中在数码上加一横线表示同样数码的无限重复,如$\overline{11}=1111\cdots$)。

由于分形图上有些点一个点上同时有两个地址,所以此 IFS 不是全不连通的。另外,可以取开集 $V=\{$顶点为$(0,0),(1,0),(0,1)$的开三角形$\}$,则 IFS 中的映射满足:$\forall\, i,j\in\{1,2,3\}, i\neq j$,

$$w_i(V)\cap w_j(V)=\varnothing$$

$$\bigcup_{i=1}^{3} w_i(V)\subset V$$

所以由定理 2.2.2,这个 IFS 是刚触及的。

例 2.2.4 IFS$\{R: w_1(x)=x/2, w_2(x)=(3x+1)/4\}$与例 2.2.2 中的 IFS 有相同的吸引子 $A=[0,1]$,实际上,对这个 IFS,有

$$w_1(A)\cup w_2(A)=\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{4},1\right]=[0,1]=A$$

但是
$$w_1(A)\cap w_2(A)=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$$

即这个 IFS 不是全不连通的,也不是刚触及的,因而是重叠的。

要注意的是,我们上面提到的"全不连通"、"刚触及的"、以及"重叠的"这些定义是对 IFS 而不是对它的吸引而言的。不同的 IFS 可以有相同的吸引子,属于上述三种不同类型的 IFS 也可以有相同的吸引子。例如 2.2.2 和例 2.2.4 的 IFS 的吸引子都是 $A=[0,1]$,但例 2.2.2 的 IFS 是刚触及的,而例 2.2.4 的 IFS 是重叠的。

对于映射是相似变换的全不连通的或者是刚触及的 IFS,它的吸引子的维数能比较快的求得

定理 2.2.3 设$\{\boldsymbol{R}^m, w_1,\cdots,w_N\}$是双曲型的 IFS,其中 $w_i(i=1,2,\cdots,N)$分别是相似比为 c_i 的相似变换。如果 IFS 是全不连通的或者是刚触及的,则对它的吸引子 A 有:

$$\dim_B A=\dim_B A=s$$

其中 s 由方程

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^s = 1 \tag{2.2.4}$$

的解给出，并且对这个值 s

$$0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty \tag{2.2.5}$$

此定理的证明可参见文献[7]，这里我们把证明略去。

利用定理 2.2.3，我们可以对一类用相似变换定义的分形集的分形维数有较明确的了解。

例 2.2.5 计算如图2.2.2中的分形的分维，这个分形是双曲型 IFS$\{R^2, w_1, w_2, w_3, w_4\}$的吸引子，其中 w_1, w_2, w_3 是相似比为 0.5 的相似变换，w_4 是相似比为 0.3 的相似变换，w_1, w_2, w_3 分别把以(0,0)，(1,0)，$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为顶点的三角形变成左下角，顶部及右下角的三个小三角形，而 w_4 把以(0,0)，(1,0)，$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为顶点的三角形变成中心的边长为 3/10 的小等边三角形。由定理 2.2.2，容易看出这个 IFS 是刚触及的。

因此，由定理 2.2.3，对这个 IFS 的吸引子 A 有

$$\dim_H A = \dim_B A = s$$

其中 s 由指数方程(2.2.4)的解给出，即

$$3 \times 0.5^s + 0.3^s = 1$$

用数值解法可知

$$s = \dim_H A = \dim_B A \simeq 1.786$$

例 2.2.6 考虑例1.2.3中的广义 Sierpinski 海绵的分维，这个分形可以看成是刚触及的双曲 IFS$\{R^3, w_1, \cdots, w_{20}\}$的吸引子，每个 w_i 都是相似比为$\frac{1}{3}$($i = 1, 2, \cdots, 20$)的相似变换。由定理 3，分维可由指数方程(2.2.4)的解给出，即

$$20 \times \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

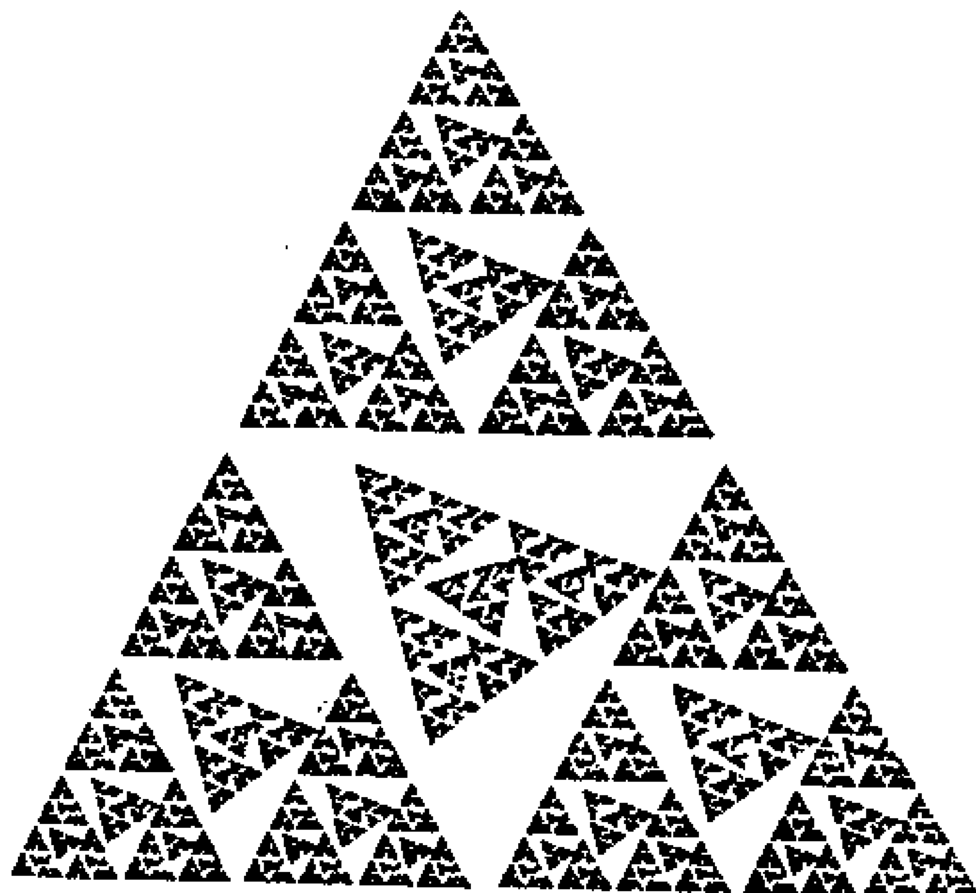


图 2.2.2 双曲型 IFS$\{\boldsymbol{R}^2, w_1, w_2, w_3, w_4\}$的吸引子的图像，其中 w_1, w_2, w_3 的相似比都为 0.5，w_4 的相似比为 0.3。吸引子的分维由指数方程 $\sum_{i=1}^{N} c_i^s = 1$ 的解给出，这个吸引子的分维大约等于 1.768

解得 $$s = \dim_H A = \dim_B A = \frac{\log 20}{\log 3} \simeq 2.73$$

并且由式(2.2.5)，有

$$0 < \mathscr{H}^{\frac{\log 20}{\log 3}}(A) < \infty$$

注意到求出来的维数表达式与式(1.2.4)表示的自相似集的维数表达式

$$\dim_s A = \log N / \log 1/r$$

是完全一致的。由此可见，对严格自相似分形 A，下面的等式成立：

$$\dim_H A = \dim_B A = \dim_s A$$

如果读者还想了解理会更多的用指数方程(2.2.4)求具体分维的例题,可参见文献[4]第9章,因为篇幅的关系,这里就不再继续列举这方面的列题了。

在这一节的最后,说明一下编码空间中的度量有另一种等价的定义方式。

定理 2.2.4 设Σ表示有 n 个数码的编码空间,并在其上定义两个距离

$$\rho_1 = \rho_{c_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i},$$

$$\rho_2 = \rho_{c_2} = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{(N+1)^i} \right|$$

则(Σ, ρ_1)与(Σ, ρ_2)是等价度量空间

证明 因为任意 $x, y \in \Sigma$,显然有

$$\rho_1(x, y) \geqslant \rho_2(x, y)$$

所以要证明定理 2.2.4,只需证明存在常数 c,使

$$c\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y)$$

这后一步证明作为一个练习留给读者。

利用定理 2.2.4 很容易证明任一编码空间,只要含有的数码不少于 2 个,则它一定与某一全不连通的类康托集度量等价。

证明 设编码空间中含有 N 个数码,定义 IFS, $\left\{[0,1], w_n(x) = \frac{1}{N+1}x + \frac{n}{N+1}, n = 1, \cdots, N\right\}$我们先说明这个双曲型 IFS 的吸引子 A 是个类康托集。

经简单计算知道,对任一 $n \in \{1, \cdots, N\}$,

$$w_n[0,1] = \left[\frac{n}{N+1}, \frac{n+1}{N+1}\right]$$

所以如果记

$$W(B)=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(B),\text{则}$$

$$W[0,1]=\bigcup_{n=1}^{N}\left[\frac{n}{N+1},\frac{n+1}{N+1}\right]=\left[\frac{1}{N+1},1\right]$$

即第一次迭代去掉了区间$\left[0,\frac{1}{N+1}\right]$。

同样 $w_m(w_n[0,1])=w_m\left[\frac{n}{N+1},\frac{n+1}{N+1}\right]$

$$=\left[\frac{m}{N+1}+\frac{n}{(N+1)^2},\frac{m}{N+1}+\frac{n+1}{(N+1)^2}\right]$$

$$m,n\in\{1,2,\cdots,N\}$$

即第二次迭代又去掉了 N 个小区间$\left(\frac{m}{N+1},\frac{m}{N+1}+\frac{1}{(N+1)^2}\right)$, $m=1,2,\cdots,N$,以此类推。

所以 A 上任一点如果按以 $N+1$ 为底展开,则都是一串不含数字 0 的字串,即 A 是一个全不连通的类康托集。

下面考虑连续变换

$$\Phi:\left(\sum,\rho_c\right)\to(A,\rho_E)$$

由定理 2.2.1 知 Φ 是可逆的,且任意 $\sigma,\omega\in\Sigma$,

$$\begin{aligned}&\rho_E(\Phi(\sigma),\Phi(\omega))\\ =\ &\rho_E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma_i}{(N+1)^i},\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\omega_i}{(N+1)^i}\right)\\ =\ &\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma_i-\omega_i}{(N+1)^i}\right|\end{aligned}$$

用定理 2.2.4 的记号,我们有

$$\rho_{c_2}(\sigma,\omega)=\rho_E(\Phi(\sigma),\Phi(\omega))$$

又由定理 2.2.4 知 ρ_{c_2} 与 $\rho_{c_1}=\rho_c$ 等价,由此即得(Σ,ρ_c)与(A,ρ_E)度量等价。

2.3 分形上的动力系统

动力系统是确定性分形的源泉,其原理与 IFS 理论广泛地交织

在一起，后面介绍的漂移动力系统，与 IFS 是密切相联系的。通过研究动力系统的轨道，一方面可以认识更多的分形；另一方面可以了解第 5 章讲到的随机迭代算法计算分形图像的理论根据。

定义 2.3.1 动力系统是一个在度量空间(X,ρ)上的变换 f，一般表示成$\{X,f\}$。f 是一个向前迭代$f^n(x)$，$n=0,1,2,\cdots$就称为点 $x\in X$ 的轨道，一般可以把 x 的轨道 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 当作在时刻 $0,1,2,\cdots$时某一数量的值，所以时刻 $n+1$ 时的值 x_{n+1}是根据在时刻 n 的值x_n 通过函数 $x_{n+1}=f(x_n)$给出，包括生物种群，稳定流体粒子的位置，和带有利息的投资额都可以用某一形式的轨道来描述。

在动力系统理论中，人们感兴趣的是，沿着一个轨道发展下去，是否存在经常出现的一类吸引子？通过研究系统的轨道，将了解更多的分形的性质，特别当涉及的映射不是压缩映射，并且变换能够产生比较奇异的行为时，动力系统就会是十分有趣的，一个点的轨道可能是一个复杂的几何体。为搞清这些问题，先叙述一些与动力系统有关的基本概念。

定义 2.3.2 设$\{X,f\}$是动力系统，对 $x\in X$，如果存在正整数 n 使$f^n(x)=x$，则称 x 为f 的周期点。而使 $f^n(x)=x$ 的最小正整数称为点 x 的周期，f 的周期点的轨道称为f 的一个循环，循环的周期是循环中包含的不同点的个数，它正好等于循环中一个点的周期。

定义 2.3.3 设$\{X,f\}$是动力系统，$x_f\in X$ 是f 的不动点；如果存在 $\varepsilon>0$，使 f 把球$B(x_f,\varepsilon)$映到它自身，并且 f 在$B(x_f,\varepsilon)$上是压缩的，则称 x_f 是f 的吸引不动点；如果对任意 $y\in B(x_f,\varepsilon)$，存在 $c>1$，使

$$\rho(f(x_f),f(y))\geqslant c\rho(x_j,y)$$

则称 x_f 是f 的斥性不动点。

直观地说，一个吸引不动点附近的轨道都收敛到这个不动点上，而一个斥性不动点附近的点经过迭代之后都“远离”这个不动点。下面的定义是定义 2.3.2 的进一步推广。

定义 2.3.4 f 的具有周期 n 的周期点是吸引的，如果它是 f^n

的吸引不动点;周期 n 的循环是 f 的吸引循环,如果这个循环包含一个 f 的 n 周期的吸引周期点。f 的 n 周期的周期点是斥性的,如果它是 f^n 的斥性周期点;一周期 n 的循环是 f 的斥性循环,如果这个循环包含一个 f 的 n 周期的斥性周期点。

定义 2.3.5 设 $\{X, f\}$ 是动力系统,点 $x \in X$ 称为 f 的归结为周期的周期点,如果对某个正整数 m, $y = f^m(x)$ 是 f 的周期点。

下面主要研究分形上的动力系统,我们需要以下的结论:

引理 2.3.1 设 $\{X, w_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$ 是一个以 A 为吸引子的双曲 IFS,如果这个 IFS 是全不连通的,则每个变换 w_n, $A \to A$, $n = 1, 2, \cdots, N$ 是 1—1 的。

证明 设对某个 $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$, w_n 不是 1—1 的,则存在 $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A$,使

$$w_n(x_1) = w_n(x_2) = a \in A$$

如果 x_1, x_2 的地址分别是 σ 和 ω,则 A 上的一点 a 有两个不同的地址 $n\sigma$ 和 $n\omega$,这与 IFS 是全不连通的矛盾,故每个变换 w_n,都是 1—1 的。

有了引理 2.3.1,下面对漂移动力系统的定义就是很自然的了。

定义 2.3.6 设 $\{X, w_n, n = 1, 2, \cdots N\}$ 是吸引子为 A 的全不连通的 IFS,在 A 上定义变换 $S: A \to A$,使

$$S(a) = w_n^{-1}(a) \qquad a \in w_n(A)$$

则称 S 为与吸引子 A 相关的漂移变换,其中把 w_n 看成是 A 上的变换。动力系统 $\{A, S\}$ 称为相应于原 IFS 的漂移动力系统。

在定义 2.3.6 中我们注意到由于 $w_n: A \to A$ 是 1—1 的,且 $\bigcup_{n=1}^{N} w_n(A) = A$,所以对任意 $a \in A$,变换 S 都有定义(比如我们设 w_n 都可逆)。因为存在惟一的 $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$,使

$$a \in w_j(A)$$

所以

$$S(a) = w_j^{-1}(a)$$

还应当注意的是,有时根据问题的需要我们还可以将动力系统

(A,S)拓广成全空间上的动力系统(X,S)。

下面的例子说明漂移变换轨道的变化情况。

例 2.3.1 见图 2.3.1，它是双曲 IFS $\left\{R^2, 0.47\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, 0.47\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right], 0.47\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\right\}$的吸引子的示意图，图上还标出相应的漂移动力系统的归结于周期轨道的$\{a_n = S^n(a_0)\}_{n=0}^{\infty}$，轨道实际上是停止在不动点 $\Phi(22\,\overline{22})$。

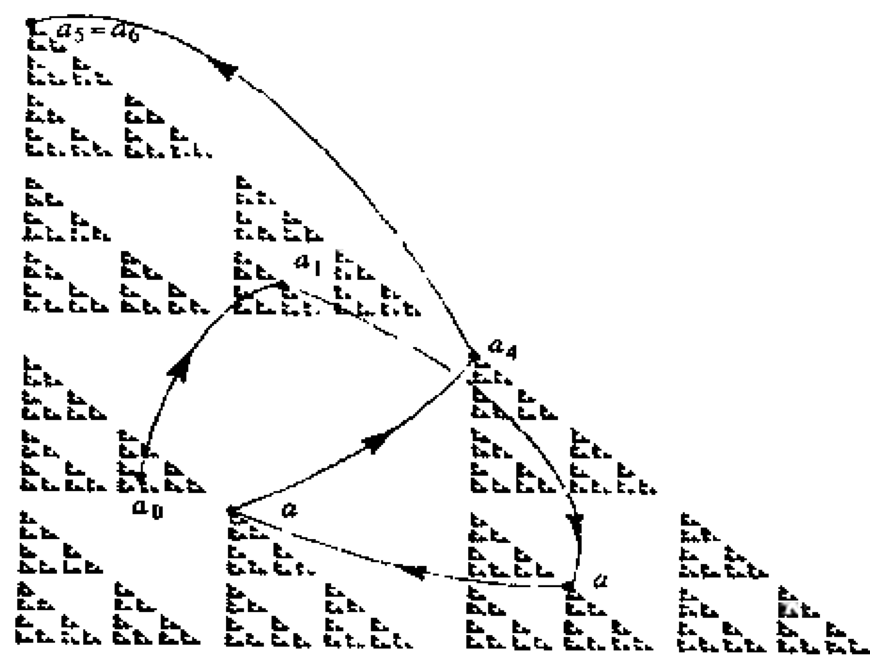


图 2.3.1 分形上漂移动力系统的一个轨道

轨道开始从 a_0 出发，按点的地址的读法，读者可以读出如图所标出的 a_0 点的地址是 $12313\,\overline{22}$即 $a_0=\Phi(12313\,\overline{22})$，前面 5 个数字是根据构造分形时前五次迭代中 a_0 在哪个保留下来的三角形的位置所确定的。左下三角形对应 1，上面三角形对应 2，右下三角形是 3。从第六次迭代往后 a_0 点始终位于保留下来的上面的三角形中，因此后面的地址都是 2。由于 a_0 的第一个地址是 1，即知

$$a_0=\Phi(12313\,\overline{22})\in w_1(A)$$

因此
$$S(a_0)=w_1^{-1}(a_0)=\Phi(2313\,\overline{22})=a_1$$

同理 $S^2(a_0)=S(a_1)=w_2^{-1}(a_1)=\Phi(313\,\overline{22})=a_2$

依次可得

$$a_3=S^3(a_0)=w_3^{-1}(a_2)=\Phi(13\,\overline{22})$$

$$a_4=S^4(a_0)=w_1^{-1}(a_3)=\Phi(3\,\overline{22})$$

$$a_5=S^5(a_0)=w_3^{-1}(a_4)=\Phi(\overline{22})$$

从此以后 S 的作用都不影响，即

$$a_6=a_7=\cdots=w_2^{-1}(a_5)=\Phi(\overline{22})=a_5$$

由此可知，a_5 是 S 的(周期为 1)的不动点。

经过简单的计算，可以发现，任意 $y\in B(a_4,\epsilon)$，其中 ε 是充分小的正数，

$$\rho_E(S(a_4),S(y))\geqslant\frac{\rho(a_4,y)}{0.47}\geqslant 2\rho(a_4,y)$$

即 a_4 是动力系统(A,S)的斥性不动点。

做为练习，读者还可以自行检验一下，以初始点是 a_0 附近但又不同于 a_0 的点出发，动力系统的轨道的变化又将如何，你又能做出什么样的结论。

从定理 1.3.2 及例 1.3.2，我们已经看到两个度量等价集的分维不变，而两个拓扑等价的集分维是可能不同，而对动力系统，我们感兴趣的动力系统本身，是它的运动动力学，它的点的运动，它的周期轨道的存在性，以及轨道的渐近行为等。而这些结构不会被同胚破坏，因此称两动力系统是相同的，如果它们由一个同胚相联系。

定义 2.3.7 两个动力系统$\{x_1,f_1\}$，$\{x_2,f_2\}$称为是等价的，或称拓扑共轭的，如果存在一个同胚 $\theta:Z_1\to Z_2$，使

$$f_1(x_1)=\theta^{-1}\circ f_2\circ\theta(x_1)\qquad\forall\, x_1\in Z_1$$

$$f_2(x_2)=\theta\circ f_1\circ\theta^{-1}(x_2)\qquad\forall\, x_2\in Z_2$$

定理 2.3.1 设$\{Z,w_1,\cdots,w_N\}$是全不连通的双曲 IFS，相应的漂移动力系统记为$\{A,S\}$，IFS 相应的 N 个数码的编码空间为Σ，

定义变换 $T:\Sigma\to\Sigma$ 使 $T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots)=\sigma_2\sigma_3\cdots$, $\forall\,\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots\in\Sigma$，则动力系统$\{A,S\}$与动力系统$\{\Sigma,T\}$是等价的。

证明 由定理2.2.1知，$\Phi(\sigma):\Sigma\to A$ 是一个同胚，如果记 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots$，且 $\Phi(a)=a$，则

$$
\begin{aligned}
w_{\sigma_1}^{-1}(a)=w_{\sigma_1}^{-1}(\Phi(\sigma))
&=\lim_{n\to\infty}w_{\sigma_1}^{-1}\circ w_{\sigma_1}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n}(x)\\
&=\lim_{n\to\infty}w_{\sigma_2}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n}(x)\\
&=\Phi(\sigma_2\sigma_3\cdots)=\Phi(T(\sigma))
\end{aligned}
$$

所以，$\Phi^{-1}S\Phi(\sigma)=\Phi^{-1}w_{\sigma_1}^{-1}(\Phi(\sigma))=\Phi^{-1}\Phi(T(\sigma))=T(\sigma)$

同理可证，任意 $a\in A$

$$S(a)=\Phi\cdot T\cdot\Phi^{-1}(a)$$

所以 $\{A,S\}$和$\{\Sigma,T\}$是等价的。

例2.3.2 设$\{X_1,f_1\}$，$\{X_2,f_2\}$是等价动力系统，$\theta:X\to X$ 是使它们等价的同胚，则$\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$是$\{X_1,f_1\}$的 p 周期的循环，当且仅当$\{\theta(x_1),\theta(x_2),\cdots\theta(x_p)\}$是关于$\{X_2,f_2\}$的 p 周期循环。

证明 由于动力系统$\{X_1,f_1\}$与动力系统$\{X_2,f_2\}$等价，所以如果 x_1 是 f_1 的 p 周期点，则有

$$f_1(x_1)=\theta^{-1}\cdot f_2\cdot\theta(x_1)$$

由归纳法易证 $$f_1^p(x_1)=\theta^{-1}\cdot f_2^p\cdot\theta(x_1)$$

其中 θ 是X_1 到 X_2 的同胚，由于 $f^p(x_1)=x_1$，即得

$$x_1=\theta^{-1}f_2^p(\theta(x_1))$$

即 $$\theta(x_1)=f_2^p(\theta(x_1))$$

所以 $\theta(x_1)$也是 f_2 的 p 周期点。类似可证，如果$(x_1,\cdots,x_p)$是 f_1 的 p 周期轨道，则$(\theta x_1,\cdots,\theta x_p)$也是 f_2 的 p 周期轨道。

其实，还可以进一步的证明，如果$\{x_1,\cdots,x_p\}$是 f_1 的斥性 p 周期轨道，则$\{\theta x_1,\cdots,\theta x_p\}$也是 f_2 的斥性 p 周期轨道。但对吸引轨

道却未必有这样的性质，读者可以做为练习，想法证明。

从下面的这道例题中，可以具体地了解漂移动力系统与相应的 IFS 之间的内在联系。

例 2.3.3 设 $w_1(x)=x/3$, $w_2(x)=1-x/3$，则 $\{[0,1], w_1, w_2\}$ 是双曲 IFS，容易验证，当 A 是三分康托集时

$$w_1(A)\cup w_2(A)=A \tag{2.3.1}$$

A 是此 IFS 的吸引子，相应的漂移变换：

$$S(x)=w_i^{-1}(x) \qquad 当\ x\in w_i(A) \qquad i=1,2$$

它可以写成

$$S(x)=\frac{3}{2}(1-|2x-1|) \qquad x\in A$$

$\{A,S\}$ 就是相应于 IFS 的漂移动力系统，如果把 S 的定义域放宽到整个实直线 $\boldsymbol{R}$，漂移动力系统 (A,S) 拓广成动力系统 $\{\boldsymbol{R},S\}$，这时 S 就是著名的帐状映射（因为 S 的图像成帐状，故有此名）。

考虑动力系统 $\{\boldsymbol{R},S\}$，可以看出 A 上的点都是 S 的斥性不动点，实际上，由式 (2.3.1)，

$$S(A)=A$$

注意到，如果 $x<0$，那么 $S(x)=3x$，所以当 $k\to\infty$ 时，$S^k(x)\to-\infty$；如果 $x>1$，那么 $S(x)<0$，所以 $S^k(x)=S^{k-1}S(x)$ 也随 $k\to\infty$ 而趋于 $-\infty$；如果 $x\in[0,1]/A$，那么存在 k，使

$$x\notin\bigcup_{i_j=1,2}w_{i_1}\circ\cdots\circ w_{i_k}[0,1]$$

从而 $S^k(x)\notin[0,1]$，同样当 $k\to\infty$ 时，也有 $S^k(x)\to-\infty$。即 A 外的点经过迭代之后都趋于 $-\infty$，所以 A 上的点都是 S 的斥性不动点。在这种情况下，称 A 为动力系统 $\{\boldsymbol{R},S\}$ 的斥子。

这个例题说明，在一定的条件下，动力系统的斥子与对应的 IFS 的吸引子是重合的。粗略的说，动力系统 $\{X,f\}$ 的斥子是 $\{X,f^{-1}\}$ 的吸引子，这里 f^{-1} 可能是多值的。

在上面的讨论中，我们已经看到，动力系统 $\{X,f\}$ 的吸引子（或

斥子)A 是变换f 的不变集,即满足 $f^{-1}(A)=A$ 的 X 的子集。当然,我们感兴趣的是属于分形空间 $\mathscr{H}(X)$的不变集(紧不变集)。紧不变集的存在性无论对分形理论的研究还是在计算方法上都是很重要的,因此介绍下面这个重要的定理。

定理 2.3.2 设(Y,ρ)是度量空间,$X\subset Y$ 是 Y 的非空紧子集,又设:

$f:X\to Y$ 是连续的,且满足 $f(X)\supset X$,则

(1) 由

$$W(A)=f^{-1}(A) \qquad \forall A\in\mathscr{H}(X)$$

定义了一个变换

$$W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$$

(2) W 具有不动点 $A\in\mathscr{H}(X)$,它由下式决定

$$A=\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(X)=\lim_{n\to\infty}W^{n}(X)$$

如果 f 还满足下面的条件

设 $U\subset X$,是度量空间(X,ρ)的开子集,则 $f(U)$是度量空间$(f(X),\rho)$的开子集。

则:

(3) W 是从度量空间$(\mathscr{H}(X),h_{\rho})$到它自身的连续变换。

证明 只证结论(1)和(2),结论(3)的证明请参阅文献[3]。

(1) 设 $B\in\mathscr{H}(X)$,则条件 $f(X)\supset X$ 意味着$f^{-1}(B)$非空,又因为 f 的定义域是 X,所以 $f^{-1}(B)\subset X$。B 是紧集,因此也必然是度量空间(X,ρ)上的闭子集,连续变换 f 把闭集变到闭集,所以 $f^{-1}(B)$也是度量空间(X,ρ)上的闭子集,由空间 X 的紧性知其上的闭子集$f^{-1}(B)$也是紧的。所以

W 是 $\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$的一个变换。

(2) f 的定义域是 X,所以

$$X\supset f^{-1}(X)$$

由 $f^{-n}(n=1,2,\cdots)$可以得到一序列不增的集序列:

$$X \supset f^{-1}(X) \supset f^{-2}(X) \supset \cdots \supset f^{-n}(X) \supset \cdots$$

所以$\{f^{-n}(X)\}$是$\mathscr{H}(X)$中的哥西列，存在极限$A \in \mathscr{H}(X)$，且

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X) = \lim_{n \to \infty} W^n(X)$$

下面证明A是$W(\cdot)$的不动点，只需证明

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

其中 $$A_n = f^{-n}(X), n = 1, 2, \cdots$$

容易验证，对任意集序列$\{B_n\}$，都有

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$$

因此

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

上面最后一个等号成立是因为

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \cdots$$

因此定理得证。

还要说明的是，在定理2.3.2的条件中，如果f的定义域不只是X而是整个Y，但$f^{-1}(X) \subset X$，即$f(X) \supset X$，则定理的结论(1)，(2)，(3)也都同时成立。

把定理2.3.2应用到计算机绘制分形图上，它就是第5章重点讲解的“逃逸时间”算法的理论基础，实际上由于定理，不变集A可以表成

$$A = \{x \in X : f^n(x) \in X, n = 1, 2, 3 \cdots\}$$

即A是那些轨道不离开X的点组成的，它是轨道逃离A的点集的余集，于是我们可以选择一个窗口W，(估计$A \subset W$)，利用计算机绘出W中轨道不离开W的点的图像，这就是“逃逸时间”算法绘制分

形图(见 5.3 节)。

2.4 升腾动力系统及其影像

上一节讨论了对应于全不连通的双曲 IFS 的漂移动力系统，这一节的目的是要把这种漂移动力系统的定义延拓到对应的 IFS 是刚触及或者是重叠的情形，这就引出了随机漂移动力系统的概念。

设$\{X, w_1, \cdots, w_N\}$是双曲 IFS，A 是其吸引子，设 $w_n: A \to A$，$n = 1, 2, \cdots, N$ 都是可逆的，但这个 IFS 不是全不连通的。为了叙述的简洁，下面我们只讨论 $N=2$ 的情形，一般情形可以类似的讨论。

定义 2.4.1 设$\{X, w_1, w_2\}$是双曲 IFS，吸引子为 A，又设 w_i，$i=1,2$ 都是 $A \to A$ 的可逆映射，A 中的点到$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$称为相应于 IFS 的随机漂移动力系统的轨道，如果：

$$x_{n+1} = \begin{cases} w_1^{-1}(x_n) & x_n \in w_1(A) \text{但 } x_n \overline{\in} w_2(A) \\ w_2^{-1}(x_n) & x_n \in w_2(A) \text{但 } x_n \overline{\in} w_1(A) \\ w_1^{-1}(x_n), w_2^{-1}(x_n) \text{之一}, & x_n \in w_1(A) \cap w_2(A) \end{cases} \tag{2.4.1}$$

这里用的是某种随机的方式定义 $w_1(A)$和 $w_2(A)$重叠区域中的动力系统，这样虽然并没有真正定义一个单值的变换 $S: A \to A$，但仍然采用符号 $x_{n+1} = S(x_n)$，并且用$\{A, S\}$表示所有可能的轨道，也同时称$\{A, S\}$为相应于 IFS 的随机漂移动力系统。

当 $w_1(A) \cap w_2(A) = \varnothing$，也就是 IFS 是全不连通时，这里定义的随机漂移动力系统与定义 2.3.6 的定义是完全一样。

实际上可以定义一个在乘积空间 $X \times \Sigma$上的完全确定的漂移动力系统，而使定义 2.4.1 中定义的随机漂移动力系统是它在原空间上的射影。为达到这个目的，可以增加一个附加变量使重叠的 IFS 变成一个全不连通的系统，这里仍只是对 $N=2$ 的情形介绍这个方法。

定义 2.4.2 设$\{X, \rho\}$是一个度量空间，Σ是只含两个数码

$\{1,2\}$的编码空间$\{X, w_1, w_2\}$是双曲 IFS,则称$\{X\times\Sigma, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$为相应于双曲 IFS 的升腾 IFS。其中

$$\tilde{w}_1(x,\sigma)=(w_1(x),1\sigma) \qquad (x,\sigma)\in X\times\Sigma$$

$$\tilde{w}_2(x,\sigma)=(w_2(x),2\sigma) \qquad (x,\sigma)\in X\times\Sigma$$

升腾 IFS 的吸引子 $\tilde{A}=\{(\phi(\sigma),\sigma):\sigma\in\Sigma\}$是定义在编码空间$\Sigma$上的映射 ϕ 的图,而原双曲 IFS 的吸引子 A 是升腾 IFS 吸引子 $\tilde{A}$ 在原来空间 X 上的射影:即

$$\begin{aligned} A &= \{x\in X:(x,\sigma)\in\tilde{A}\ \text{对某}\ \sigma\in\Sigma\} \\ &= \emptyset(\Sigma) \end{aligned}$$

从定理 2.2.5 已知,编码空间Σ与某个全不连通的类康托集度量等价,由此知升腾 IFS 的吸引子也是全不连通的。

引理 2.4.1 设$\{X, w_1, w_2\}$是双曲 IFS,它的吸引子是 A,设 $w_1, w_2: A\to A$ 都是可逆的,则相应的升腾 IFS 是双曲的,且全不连通的。

证明 要证明引理,只需证明:

(ⅰ) $\tilde{w}_i(x,\sigma)$ $i=1,2$,是压缩的;

(ⅱ) $\tilde{w}_i(x,\sigma)$ $i=1,2$,是可逆的;

(ⅲ) $\tilde{w}_1(\tilde{A})\cap\tilde{w}_2(\tilde{A})=\emptyset$。

设原双曲 IFS 的压缩比是 C,在乘积空间 $X\times\Sigma$中用乘积距离:

$$\rho\times\rho_c((x,\sigma),(y,\omega))=\rho(x,y)\times\rho_c(\sigma,\omega)$$

那么

$$\begin{aligned} &\rho\times\rho_c(\tilde{w}_i(x,\sigma),\tilde{w}_i(y,\omega)) \qquad (i=1,2) \\ &=\rho((w_i(x),i\sigma),(w_i(y),i\omega)) \\ &=\rho((w_i(x),w_i(y))\times\rho_c(i\sigma,i\omega)) \\ &\leqslant c\rho(x,y)\times\frac{1}{3}\rho_c(\sigma,\omega) \\ &\leqslant\frac{c}{3}\rho\times\rho_c((x,\sigma),(y,\omega)) \end{aligned}$$

所以升腾 IFS 是双曲的。

由于 $\tilde{w}_i$ 是 1—1 且是满射($i=1,2$),因此 $\tilde{w}_i^{-1}$ 存在,并且:

$\tilde{w}^{-1}(x,\sigma)=(w_i^{-1}(x),\sigma_2\sigma_3\cdots)$，当 $\sigma_1=i$，其中 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots$，$i=1,2$。

最后，由 $\tilde{w}_i$ 的定义，对任意 $(x,\sigma)\in\tilde{w}_1(\tilde{A})$ 和 $(y,\omega)\in\tilde{w}_2(\tilde{A})$，必有 $\sigma_1=1$，$w_1=2$，即 $\sigma\neq\omega$ 所以 $\tilde{w}_1(\tilde{A})\cap\tilde{w}_2(\tilde{A})=\varnothing$。由定理 2.2.2 知 $\{X\times\Sigma,\tilde{w}_1,\tilde{w}_2\}$ 是全不连通的双曲 IFS。

定义 2.4.3 设 $\{X,w_1,w_2\}$ 是双曲 IFS，它的吸引子是 A，w_1，w_2；$A\to A$ 都是可逆的，$\tilde{A}$ 表示相应的升腾 IFS $\{X\times\Sigma,\tilde{w}_1,\tilde{w}_2\}$ 的吸引子，则相应于全不连通的升腾 IFS，可以定义单值的反函数 $\tilde{S}$：

$$\tilde{S}(x,\sigma)=\begin{cases}\tilde{w}_1^{-1}(x,\sigma) & \sigma_1=1\\ \tilde{w}_2^{-1}(x,\sigma) & \sigma_1=2\end{cases}\quad(\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots)$$

$$=(w_i^{-1}(x),T(\sigma))\qquad\forall(x,\sigma)\in\tilde{A}$$

其中 $T(\sigma_2\sigma_2\cdots)=\sigma_2\sigma_3\cdots$，$\forall\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\in\Sigma$。称动力系统 $(\tilde{A},\tilde{S})$ 为相应于升腾 IFS $\{X\times\Sigma,\tilde{w}_1,\tilde{w}_2\}$ 的升腾漂移动力系统。

从升腾动力系统的定义，可以清楚的看出，一个漂移动力系统（不论是随机的还是非随机的），总可以找到一个升腾漂移动力系统，使这后一个系统作用下轨道上每一点的第一个分量是前一个系统作用下轨道上的点。这个基本事实可以总结成下面的定理，它一般称为影像定理（The Shadow Theorem）——漂移动力系统的轨道可以看成是升腾漂移动力系统轨道的“影子”。但要注意的是升腾动力系统的轨道是确定性的，而它的“影子”却可以在漂移动力系统的作用下随机的“跳动”（在重叠部分），这是由于漂移变换定义中的随机因素（参见图 2.4.3）。读者应当能独立完成下面定理的证明。

定理 2.4.1 （影像定理），设 $\{X,w_1,w_2\}$ 是具有可逆变换 w_1，w_2 和吸引子 A 的双曲 IFS，$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是相应的漂移动力系统 $\{A,S\}$ 的任一轨道，则存在升腾动力系统 $\{\tilde{A},\tilde{S}\}$ 的轨道，$\{\tilde{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$，使对任意 n，$\tilde{x}_n$ 的第一个分量是 x_n。

下面的一个例子是对刚触及的 IFS 定义的漂移动力系统例子。

例 2.4.1 考虑双曲 IFS$\{\boldsymbol{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$,其中 w_i 分别定义为

$$w_1(x,y)=(0.5x,0.5y+0.5)$$

$$w_2(x,y)=(0.5x+0.5,0.5y)$$

$$w_3(x,y)=(0.5x,0.5y)$$

这个 IFS 的吸引子 A 是以(0,0),(0,1),(1,0)为顶点的 Sierpinski 三角形,相应的漂移变换可以定义为:

$$f(x,y)=\begin{cases} w_1^{-1}(x,y) & (x,y)\in w_1(A) \\ w_2^{-1}(x,y) & (x,y)\in w_2(A)\setminus\{(0.5,0.5)\} \\ w_3^{-1}(x,y) & (x,y)\in w_3(A)\setminus\{(0.05),(0.5,0)\} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (2x,2y-1) & y\geqslant 0.5 \\ (2x-1,2y) & x\geqslant 0.5, y<0.5 \\ (2x,2y) & \text{其他} \end{cases}$$

这个定义的方法与式(2.4.1)一致,只不过这里刚触及的三个点已取定其中的一组值,因而也就没有随机性了。

可以将漂移动力系统$\{A,f\}$拓广到$\{\boldsymbol{R}^2,f\}$,这个动力系统的状况如图 2.4.1 所示。

可以像例 2.3.3 一样,类似地说明 A 是 f 的斥子。现在我们再举一例分析升腾漂移动力系统对应的升腾 IFS 的吸引子的结构。

例 2.4.2 考虑 IFS$\{C: w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z)\}$其中

$$w_1(z)=0.5(\cos45°-i\sin45°)z+(0.4+0.2i)$$

$$w_2(z)=0.5(\cos45°-i\sin45°)z-(0.4+0.2i)$$

$$w_3(z)=0.5z+0.3i$$

$$w_4(z)=0.5z-0.3i$$

相应的 IFS 吸引子的草图如图 2.4.2 所示,图中的吸引子看来像片枫叶。

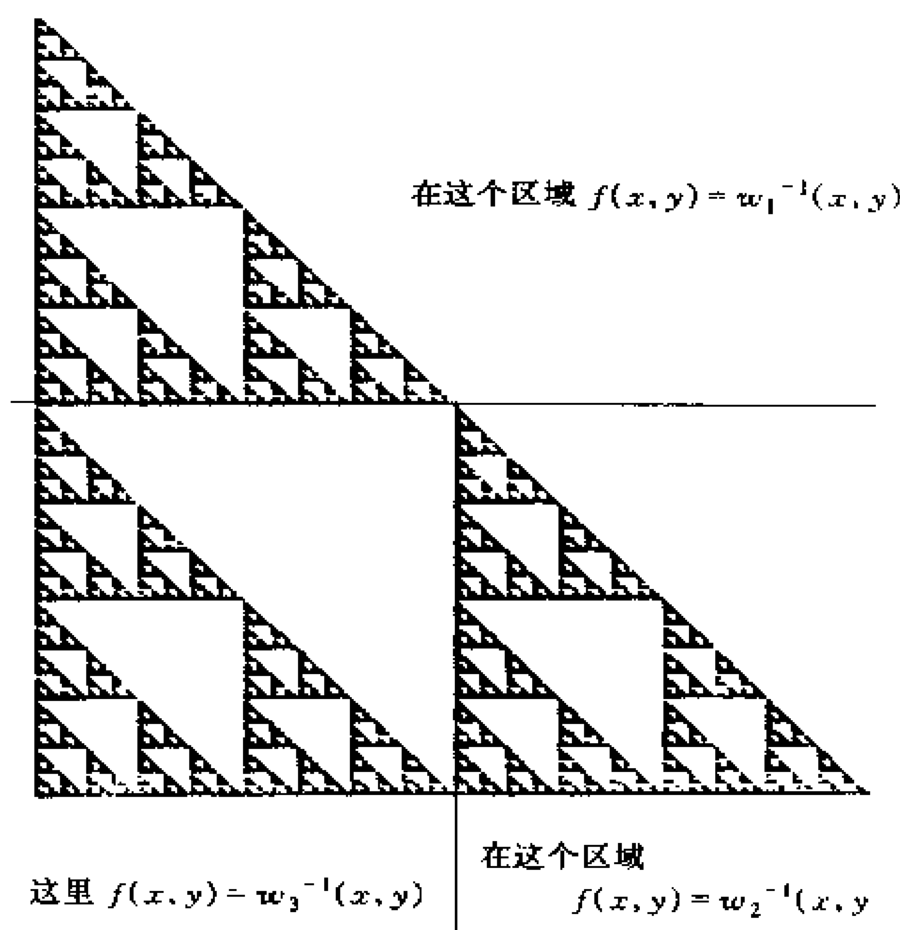


图 2.4.1　动力系统$\{R^2,f\}$的吸引子是一个 Sierpinski 三角形，这个动力系统是由例 2.4.1 中定义的漂移动力系统$\{A,f\}$拓广到 R^2 上的，其中 A 就是 Sierpinski 三角形

在图上整个叶子是由四部分的叶子重叠组成的，利用在乘积空间上构造出的升腾 IFS，使升腾 IFS 的吸引子是全不连通的，我们可以认为每个小叶片都是由四片在不同高度的小叶片组成的，这些小叶片的高度的分布与某个类康托集相同(因为编码空间 Σ 与一类康托集等价)，这些无穷小叶片组合起来在平面 C 上的射影就是重叠的吸引子，而在乘积空间 $C\times\Sigma$ 上的 IFS 对应的是确定的升腾漂移动力系统。

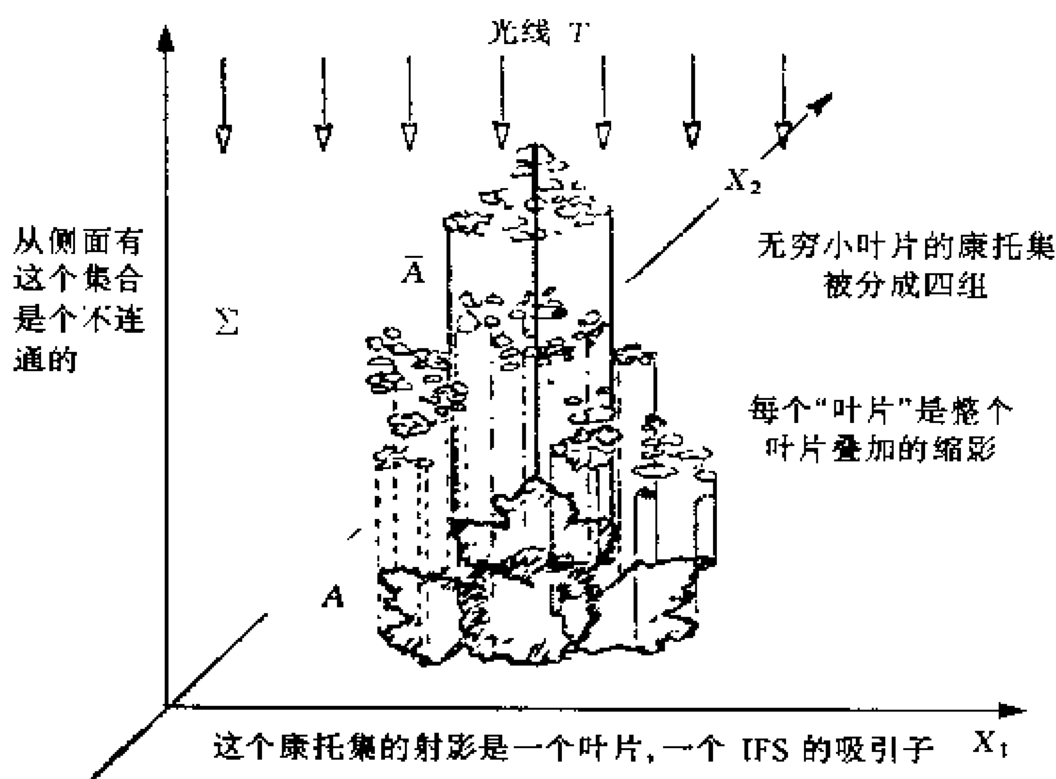


图 2.4.2　例 2 中 IFS 的吸引子，"升腾"之后的吸引子变成全不连通的

2.5　混沌动力系统

如果动力系统$\{X,f\}$有分形吸引子或分形斥子 A，那么 f 一般都在A 上表现为"混沌"的。$\{X,f\}$就是这一节主要讲解的混沌动力系统，由于篇幅的限制，我们只对全不连通的双曲 IFS 相应的漂移动力系统$\{A,S\}$讨论它的混沌性质。

定义 2.5.1　一个动力系统$\{X,f\}$的轨道$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$称为在 X 中稠，如果序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$在 X 中稠。

稠密的性质在同胚下是不变的。如果集 B 在度量空间(X,ρ)中稠，且已知 $\theta:X\to Y$ 是一个同胚，则 $\theta(B)$也在 Y 中稠。

如果$\{X,f\}$，$\{Y,g\}$是在 θ 之下的等价动力系统，而$\{x_n\}$是 f 的在X 中稠的轨道，则$\{\theta(x_n)\}$也是一个 g 在Y 中稠的轨道。

定义 2.5.2　一个动力系统$\{X,f\}$称为可迁的，如果当 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$

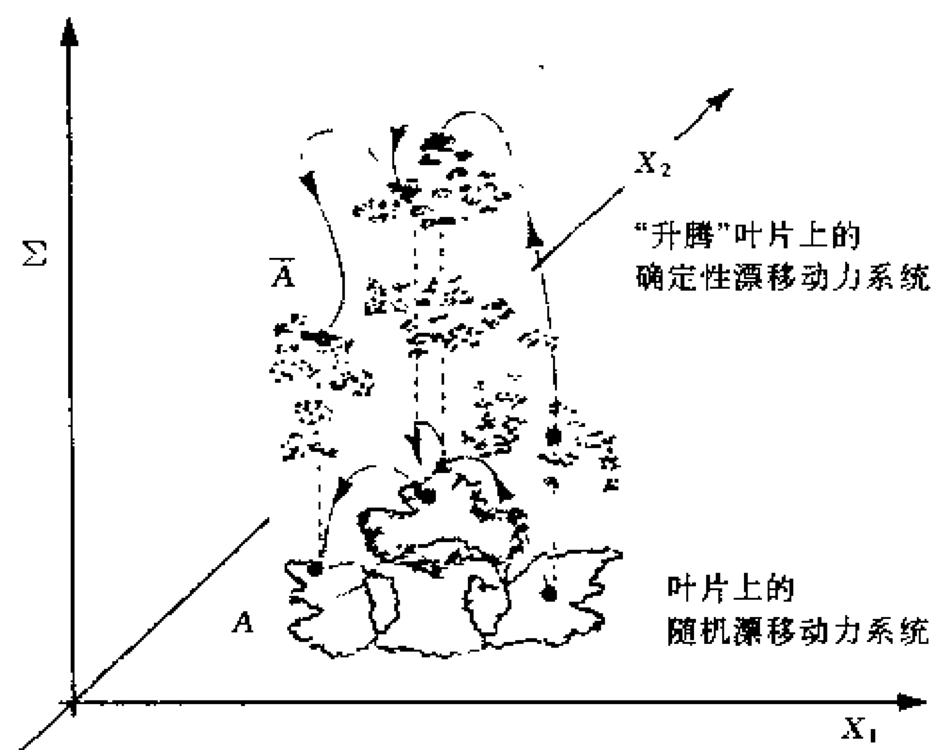


图 2.4.3 影像定理的图解,确定性的全不连通的升腾动力系统的轨道有一个在漂移动力系统作用下的随机跳动的"影像"。(在重叠的地方,取的值可以随机选择)

为度量空间$\{X,f\}$的两个开子集,则存在有限整数 n,使

$$\mathscr{U}\cap f^n(\mathscr{V})\neq\varnothing$$

先给出一个可迁动力系统的例子:

例 2.5.1 动力系统$\{[0,1]:f(x)=\min\{2x,2-2x\}\}$是可迁的。

证明 因为

$$f(x)=\min\{2x,2-2x\}=\begin{cases}2x & x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2-2x & x>\frac{1}{2}\end{cases}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

设 $\mathscr{V}$是$[0,1]$的任一开子集,利用开集的性质,一定存在一个开球(区间)$B^\circ=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$使 $B^\circ\subset\mathscr{V}$,其中 $x\in[0,1]$,ε 是充分小的正数。可以把 B°表示成

$$B^{*}=\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\frac{1}{2}+\varepsilon_2\right),\ \frac{1}{2}\geqslant\varepsilon_2>\varepsilon_1\geqslant-\frac{1}{2}$$

(其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 与 x,ε 有关)。利用 f 的定义,容易计算

$$|B^{*}|=\varepsilon_2-\varepsilon_1$$

$$|f(B^{*})|=2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)=2|B^{*}|$$

且 $f([0,1])\subset[0,1]$,所以存在充分大的正数 n 使, $|f^n(B^{*})|=2^n|B^{*}|>1-|\mathscr{U}|$

其中 $\mathscr{U}$ 是[0,1]上的另一个开子集,又显然有

$$f^n(B^{*})\subset f^n(\mathscr{V})$$

所以

$$|f^n(\mathscr{V})|>1-|\mathscr{U}|,\text{即}$$

$$f^n(\mathscr{V})\cap\mathscr{U}\neq\varnothing$$

定义 2.5.3 称动力系统$\{X,f\}$是对初始条件敏感的,如果存在 $\delta>0$,使对任意 $x\in X$,和任意的球 $B(x,\varepsilon)$,都存在 $y\in B(x,\varepsilon)$ 和整数 $n\geqslant0$,使

$$\rho(f^n(x),f^n(y))>\delta$$

直观的,所谓对初始条件敏感,是在动力系统的作用下,开始时相互非常接近的点在迭代之后并不保持其接近性。由于这个性质,使得想对 f 的轨道作精确持久的数值逼近是不可能的;同时也给分形图的计算机模拟带来较大的困难,因为开始时,由于计算机分辨率不够的近似计算(比如四舍五入),将造成模拟结果的千差万别。

下面就是一个对初始条件敏感的很简单的动力系统的实例。

例 2.5.2 动力系统$\{R^{+},f(x)=2x\}$就是一个对初始条件敏感的动力系统,其中 $R^{+}=[0,\infty]$。

实际上对任意 $x\in R^{+}$,无论另一点 y 与它的距离多么小,距离

$$\rho(f^n(x),f^n(y))=2^n\rho(x,y)$$

随着 n 的增加可以大于给定的任意正数。

反之,动力系统$\{R^{+},f(x)=0.5x\}$就不是对初始条件敏感的。

定义 2.5.4 一个动力系统$\{X,f\}$称为是混沌的,如果

(ⅰ) $\{X,f\}$是可迁的;

（ⅱ）$\{X, f\}$对初始条件是敏感的；

（ⅲ）f 的轨道集在 X 中稠。

本章讨论过的许多动力系统都满足定义 2.5.4 中的三个条件，因此是混沌动力系统。实际上，可以证明：

定理 2.5.1 有两个或两个以上变换的全不连通的 IFS 相应的漂移动力系统都是混沌的。

证明 设 Σ 是定理中的 IFS 对应的编码空间，变换 T 如定理 2.3.1 中所定义，即对任意的 $\sigma \in \Sigma$，$T(\sigma) = T(\sigma_1\sigma_2\sigma_2\cdots) = \sigma_2\sigma_2\cdots$。先证明动力系统 $\{\Sigma, T\}$ 是混沌的。设 Σ 是 N 个数码 $\{1, \cdots, N\}$ 的编码空间，则 $N \geqslant 2$。

又设 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ 是 Σ 的任意两个开子集，并且可以设 $\mathscr{U}$ 为一个开球（或者存在一个开球包含在 $\mathscr{U}$ 内）。

$$\mathscr{U} = B^*(\bar{\sigma}, \varepsilon) \qquad (\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3\cdots)$$

其中 $\bar{\sigma} \in \Sigma$，$\varepsilon > 0$，则存在一个充分大的 n，使

$$\frac{1}{(N+1)^{n+1}} < \varepsilon \leqslant \frac{1}{(N+1)^n} \tag{2.5.1}$$

由式(2.5.1)知，如果令

$$\mathscr{U}_0 = \{\sigma : \sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots, \sigma_i = \bar{\sigma}_i, i = 1, \cdots, n+1\}$$

则任意 $\omega \in \mathscr{U}_0$，$\rho_c(\omega, \bar{\sigma}) \leqslant \frac{1}{(N+1)^{n+1}} < \varepsilon$，所以 $\omega \in \mathscr{U}$，即 $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$。又因为

$$T\sigma = T(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots) = \sigma_2\sigma_3\cdots,$$

则有
$$T^{n+1}\sigma = T^n(\sigma_2\sigma_3\cdots) = \sigma_{n+2}\sigma_{n+3}\cdots,$$

由 $\mathscr{U}_0$ 的定义，易见

$$T^{n+1}(\mathscr{U}_0) = \Sigma \subset T^{n+1}(\mathscr{U})$$

所以 $T^{n+1}(\mathscr{U}) = \Sigma$，因此对任意 Σ 的开子集 $\mathscr{V}$，都有 $T^{n+1}(\mathscr{U}) \cap \mathscr{V} \neq \varnothing$，即动力系统 $\{\Sigma, T\}$ 是可迁的。

其次，对任意 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots \in \Sigma$ 及球 $B(\sigma, \varepsilon)$，同样可以设 ε 满足式(2.5.1)。那么对任意的 $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\cdots \in B(\sigma, \varepsilon)$，$\omega \neq \sigma$，存在

充分大的正整数 $m>n$ 使 $\omega_k=\sigma_k, k=1,2,\cdots,m-1$，且 $\omega_m\neq\sigma_m$，则对 $0<\sigma<\frac{1}{N+1}$，有

$$\begin{aligned}&\rho_c(T^{m-1}(\omega),T^{m-1}(\sigma))\\&=\rho_c(\omega_m\omega_{m+1}\cdots,\sigma_m\sigma_{m+1}\cdots)\geqslant\frac{|\omega_m-\sigma_m|}{N+1}>\delta\end{aligned}$$

所以动力系统 $\{\Sigma,T\}$ 对初始条件是敏感的。

最后，设 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots$ 是由 $\{1,\cdots,N\}$ 组成的无穷序列，并且由 $\{1,\cdots,N\}$ 中的任意 n 个数组成的任何有限序列都可以在序列 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\cdots$ 中作为一个连续块出现。那么对 Σ 中的任意点 $\omega=\omega_1\omega_2\omega_3\cdots$ 和任何整数 q，可以找到一个适当的正整数 k，使

$$w_i=\sigma_{k+i}\qquad i=1,2,\cdots,q$$

于是
$$T^k\sigma=\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\cdots\sigma_{k+q}\cdots$$

则
$$\rho_c(T^k\sigma,\omega)\leqslant\frac{1}{(N+1)^q}\to 0,(q\to\infty)$$

即轨道 $\{T^k\sigma\}_{k=0}^{\infty}$ 在 Σ 中稠。

因为 $\sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_1\cdots$ 是周期为 k 的周期点，所以 T 的周期轨道也在 Σ 中稠。

由此知 $\{\Sigma,T\}$ 是混沌动力系统。

再由定理 2.3.1 知，动力系统 $\{\Sigma,T\}$ 和动力系统 $\{A,S\}$ 等价，并且 $\Phi:\Sigma\to A$ 是两个空间之间的同胚。

可以逐条验证，同胚不改变混沌性质(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)，因此动力系统 $\{A,S\}$ 也同时满足可迁性，对初始条件的敏感性以及轨道的稠性，所以 $\{A,S\}$ 是混沌动力系统。

3 分形插值

从传统的欧氏几何、三角学及微积分教程中，我们已经学会了如何用直线、圆、抛物线等简单曲线来建立现实生活中各种实物的模型；欧氏空间中的三角函数、多项式等初等函数又是分析实验数据方法的基础。如计算机上实变量实值函数的数值实验，实验的结果将是具有形式

$$\{(x_i, F_i): i = 0, 1, 2, \cdots, N\}$$

的一族数据，其中 N 是一个正整数，$F_i = F(x_i)$，x_i 是满足

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_N$$

的实数。传统的分析方法，是先将这些数据对应的点在绘图纸上标出，然后，从几何上分析绘图纸上的数据点的位置与关系，设法构造出一个次数尽可能低的多项式，或者是一个基本初等函数的复合函数，使多项式或复合函数的图像在区间$[x_0, x_N]$内非常接近于这些数据点(或者说与这些数据点组成的图形拟合)。请参见图 3.0.1。

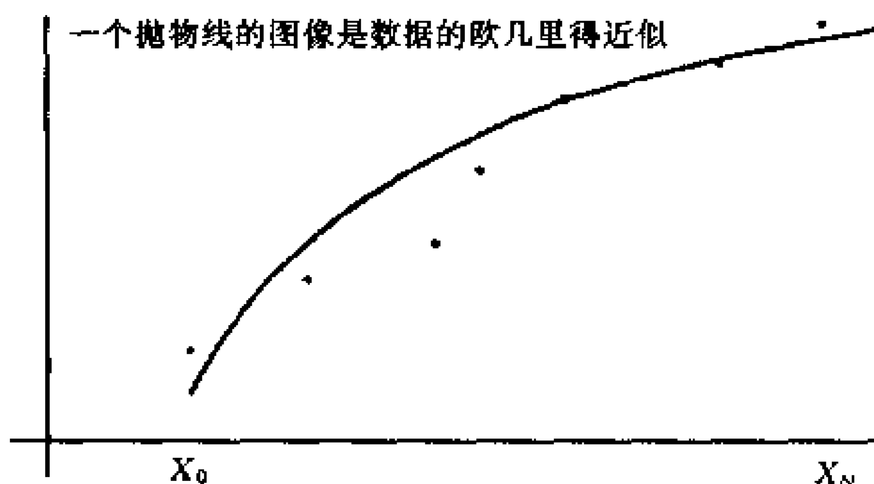


图 3.0.1 实验数据点标在绘图纸上，用传统的几何图形去拟合，一般是次数尽可能低的多项式或初等函数的图像，比如说是直线或者是二次曲线

像三角函数、有理函数这些在欧氏空间中有零点的函数，当它们的图像被充分放大之后，都具有一些共同的特征。比如它们的局部“看起来”像直线，也就是在大多数点附近，在充分小的范围内，过某点的切线段可以作为过这点的曲线段的有效的近似，而且这些曲线的分形维数通常是1。这些初等函数用途很广，不仅因为它们的几何意义，而且因为它们能够用简单的公式表达，提供了一种在计算机上存储空间小，可以通过快速算法计算的通用的科学工作语言。

本章将要介绍的分形插值函数可以看成是一种发展了的科学工作的通用语言。这种函数的图像可以近似描述那些欧氏函数不能很好地描述的物象，如山脉的轮廓，森林顶部起伏的曲线等等；并且还提供了模拟经典几何在其面前也无能为力的实验数据的新方法，如表明人体在一段时间内脉搏跳动强弱的向量。即在豪斯道夫度量下，分形插值函数的图像能接近于这些数据，而且它的分形维数与这些数据的分形维数在适当的尺度范围内是一致的。

分形插值函数可以像欧氏函数一样由“公式”简明扼要地表示，并且可以应用仿射 IFS 定理及以后将要介绍到的随机迭代算法和确定性算法快速计算，但它不同于欧氏函数，因为它可以具有非整数维数，这也正是它的优越之处。总而言之，分形插值函数在人们面前展示了一个更新、更广阔的科学天地。

3.1 分形插值函数

首先回忆一下数据集及插值函数的定义。

定义 3.1.1 称具有如下形式的点集为数据集$\{(x_i, F_i)\in \mathbf{R}^2: i=0,1,2,\cdots,N\}$，其中 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N$；相应于此数据集的插值函数是一个满足插值条件：$f(x_i)=F_i, i=0,1,2,\cdots,N$ 的连续函数$f:[x_0,x_N]\to \mathbf{R}$。点$(x_i,F_i)\in \mathbf{R}^2$ 叫做插值点，我们说函数 f 插值于这些数据。

定理 3.1.1 设 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_N<b$，则满足插值条件的 N 次多项式$P_N(x)$存在且惟一。

证明　多项式 $P_N(x)=a_0x^N+a_1x^{N-1}+\cdots+a_N$ 的存在性与包含 $N+1$ 个未知数 a_k 的 $N+1$ 个方程构成的方程组

$$\begin{aligned}
a_0x_0^N+a_1x_0^{N-1}+\cdots+a_N&=F_0\\
a_0x_1^N+a_1x_1^{N-1}+\cdots+a_N&=F_1\\
\vdots\qquad\qquad\qquad&\quad\vdots\\
a_0x_N^N+a_1x_N^{N-1}+\cdots+a_N&=F_N
\end{aligned}\qquad(*)$$

的解有关，在这里行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_0^N & x_0^{N-1} & \cdots & 1\\ x_1^N & x_1^{N-1} & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_N^N & x_N^{N-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

是 x_k 的函数，计算它的值不难，但是，行列式 Δ 的精确值对于这个定理的证明是不重要的，由线性代数的结论，方程组(*)所对应的齐次方程组有非零解 $a_0,a_1,\cdots,a_N$ 的充分必要条件是行列式 Δ 的值为零，也就是说，如果行列式 Δ 的值为零，则存在系数 a_k 不全为零的 N 次多项式，它在 $N+1$ 个不同的点 x_i 上都取零值。按多项式理论，这是不可能的，因此行列式 $\Delta\neq 0$，即知方程组(*)有惟一一组确定的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_N$。定理证毕。

传统上，构造插值函数时，由于函数类的不同，有多项式插值方法，样条插值方法，三角插值方法等等。常用的多项式插值方法又因功能的不同，分为拉格朗日插值，牛顿插值等等。上述的惟一性定理保证对于同一些点，无论用什么方法获得的满足插值条件的多项式都是同一个多项式(表示形式可能不同)。

为了便于读者理解，将分形插值函数与传统的多项式插值函数作一比较，即从它的引出、定义、改进到应用都模仿计算方法中讲述多项式插值函数的有关步骤。

我们知道 $\boldsymbol{R}^2$ 上的 IFS 的吸引子通常是分形，而由以后将要说明的确定性算法及随机迭代算法，IFS 的吸引子的图像在计算机上

很容易画出来。为此，提出一个大胆的假设：($\mathscr{L}$)："可以构造一个 $\boldsymbol{R}^2$ 上的 IFS，使它的吸引子恰为插值于给定数据集 $\{(x_i, F_i): i = 0, 1, 2, \cdots, N\}$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \to \boldsymbol{R}$ 的图像"。其实，这样的假设也不是毫无根据的，请看下面的例子：

例 3.1.1 由函数 $f(x) = 2x - x^2$ 定义的 $[0, 2]$ 上的抛物线是数据集 $\{(0,0), (1,1), (2,0)\}$ 的插值函数，设 G 是 $f(x)$ 的图像，即 $G = \{(x, 2x - x^2): x \in [0, 2]\}$，则对一切 $x \in [0, 2]$，令

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 G 是双曲型 IFS $\{\boldsymbol{R}^2; w_1, w_2\}$ 的吸引子。事实上，

$$w_1\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2\left(\frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ f\left(\frac{1}{2}x\right) \end{bmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ 2\left(1 + \frac{1}{2}x\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}x \\ f\left(+ \frac{1}{2}x\right) \end{bmatrix}$$

随着 x 在 $[0, 2]$ 上变动，第一个方程的右端产生 $f(x)$ 图像在 $[0, 1]$ 上的部分，第二个方程的右端产生 $f(x)$ 图像在 $[1, 2]$ 上的部分，故 $G = w_1(G) \cup w_2(G)$，因为 $G \in \mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)$，所以它是上述 IFS 的吸引子。

例 3.1.2 令 $\{(x_i, F_i): i = 0, 1, 2, \cdots, N\}$ 是一组数据，$f: [x_0, x_N] \to \boldsymbol{R}$ 是通过这些插值点的惟一一个连续函数，它在每段子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是线性的，即

$$f(x)=F_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(F_i-F_{i-1})\qquad x\in[x_{i-1},x_i]$$

$$i=1,2,\cdots,N$$

这个函数叫逐段线性插值函数，$f(x)$的图像 G 如图 3.1.1 所示。

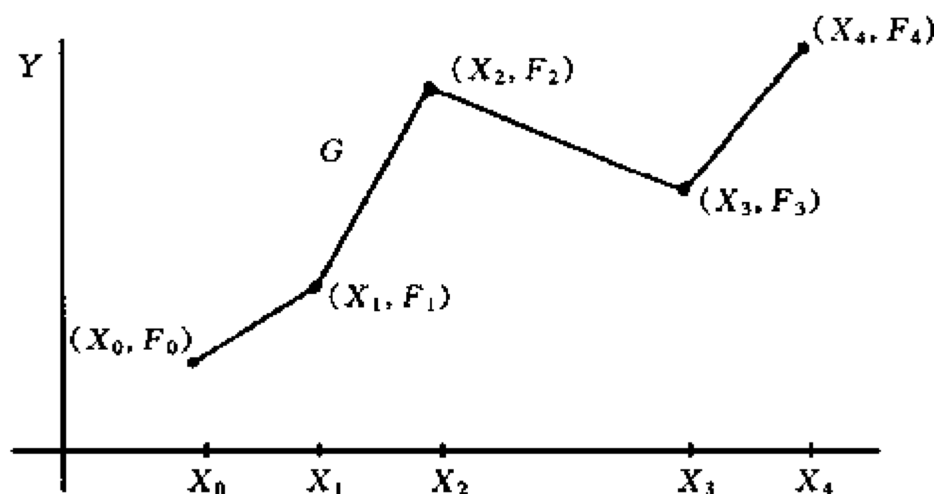


图 3.1.1　通过插值点$\{(F_i, x_i): i=0,1,2,3,4,5,6\}$的分段线性插值函数 $f(x)$的图像，这个图像还是映射是仿射变换的具有形式$\{\mathbf{R}^2; w_n, n=1,2,3,4,5,6\}$的 IFS 的吸引子

设 w_n 为仿射变换：$w_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & 0\\c_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_n\\f_n\end{pmatrix}$，则 G 是 IFS $\{\mathbf{R}^2: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$的吸引子。

其中

$$a_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_N-x_0}\qquad c_n=\frac{F_n-F_{n-1}}{x_N-x_0}$$

$$e_n=\frac{x_Nx_{n-1}-x_0x_n}{x_N-x_0}\qquad f_n=\frac{x_NF_{n-1}-x_0F_n}{x_N-x_0}$$

$$n=1,2,\cdots,N$$

$$w_n=\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & 0\\c_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_n\\f_n\end{pmatrix}\qquad x\in[x_{n-1},x_n]$$

$$=\begin{pmatrix} a_n x + e_n \\ c_n x + f_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{(x_n - x_{n-1})x}{x_N - x_0} + \dfrac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \\ \dfrac{(F_n - F_{n-1})x}{x_N - x_0} + \dfrac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_n x + e_n \\ f(a_n x + e_n) \end{pmatrix}$$

随着 x 在$[x_0, x_N]$上变动，第 n 个方程产生$f(x)$图像在$[x_{n-1}, x_n]$上的部分 $n=1,2,\cdots,N$，故 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{N} w_n(G)$所以 $G\in\mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)$，从而它是上述 IFS 的吸引子。

类似的例子是很多的，下面给出有关的理论根据。为方便起见，只考虑具有形式$\{\boldsymbol{R}^2: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$的 IFS，其中映射是仿射变换。

例 3.1.3 设 $w_n(1\leqslant n\leqslant N)$是具有特殊结构的仿射变换

$$w_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N} & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{n-1}{N} \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (3.1.0)$$

易见，w_n 将垂直线映成垂直线，把满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的垂直窄条上的点映成满足$\dfrac{(n-1)}{N}\leqslant x\leqslant\dfrac{n}{N}$的垂直窄条上的点。设 L 为一垂直于 x 轴的线段，则 $w_n(L)$也是一条垂直于 x 轴的线段，$w_n(L)$之长与 L 之长的比为$|d_n|$，则称 d_n 为变换 w_n 的垂直比例因子。若 $d_n=0, n=1,2,\cdots,N$，将得到分段线性插值函数，若$\dfrac{1}{N}<d_n\leqslant 1$，显然 x 方向的压缩强于 y 方向的。注意到 $p_1\left(0,\dfrac{f_1}{1-d_1}\right)$ 及 $p_N\left(1,\dfrac{c_N+f_N}{1-d_N}\right)$为 w_1 及 w_N 的不动点，令矩阵的表值取定使

$$w_n(p_N)=w_{n+1}(p_1) \quad (1\leqslant n\leqslant N-1) \qquad (\Delta)$$

并且使直线段$[w_n(p_1), w_n(p_N)]$连接起来组成一多角形曲线 L_1，为了避免平凡情形，设 $w_1(p_1), \cdots, w_N(p_1), P_N$ 不共线，则此 IFS 的吸引子可以由反复用 L_1 的仿射像取代直线段而构造出来。

见图 3.1.2 及 3.1.3。

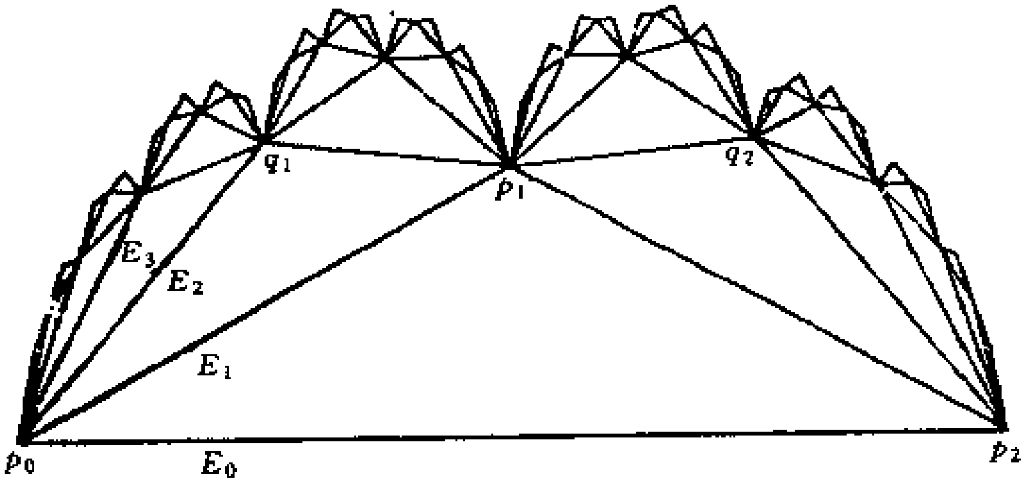
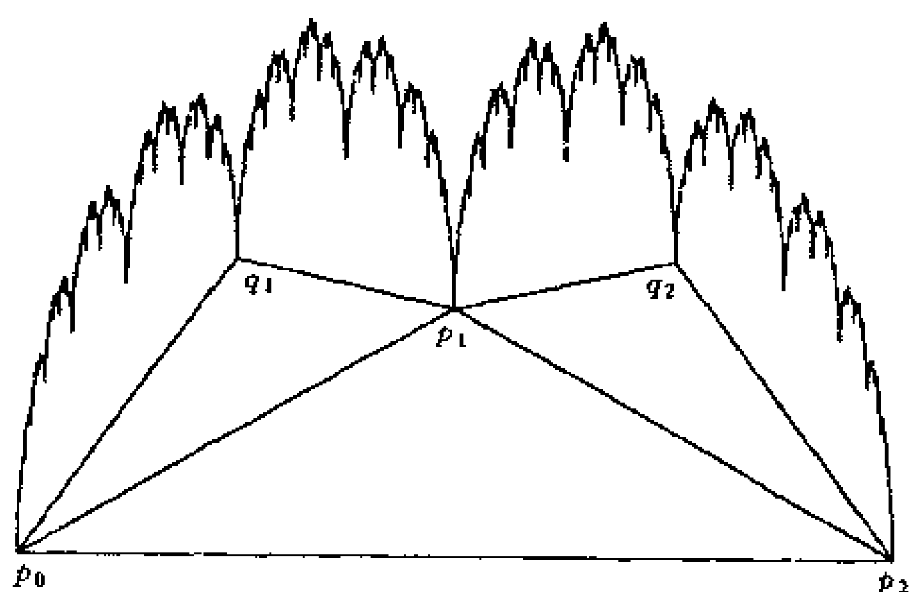


图3.1.2　自仿射曲线 F 的构造过程，仿射变换 s_1 和 s_2 把三角形 $p_0p_1p_2$ 分别变成 $p_0q_1p_1$ 及 $p_1q_2p_2$，把垂直线变成垂直线。多角形曲线 $E_0, E_1\cdots$ 由 $E_{k+1}=s_1(E_k)\cup s_2(E_k)$ 得出，并给出 F 的越来越好的逼近。因此当 N 比较大时，豪斯道夫维数不能比猜想的值小太多

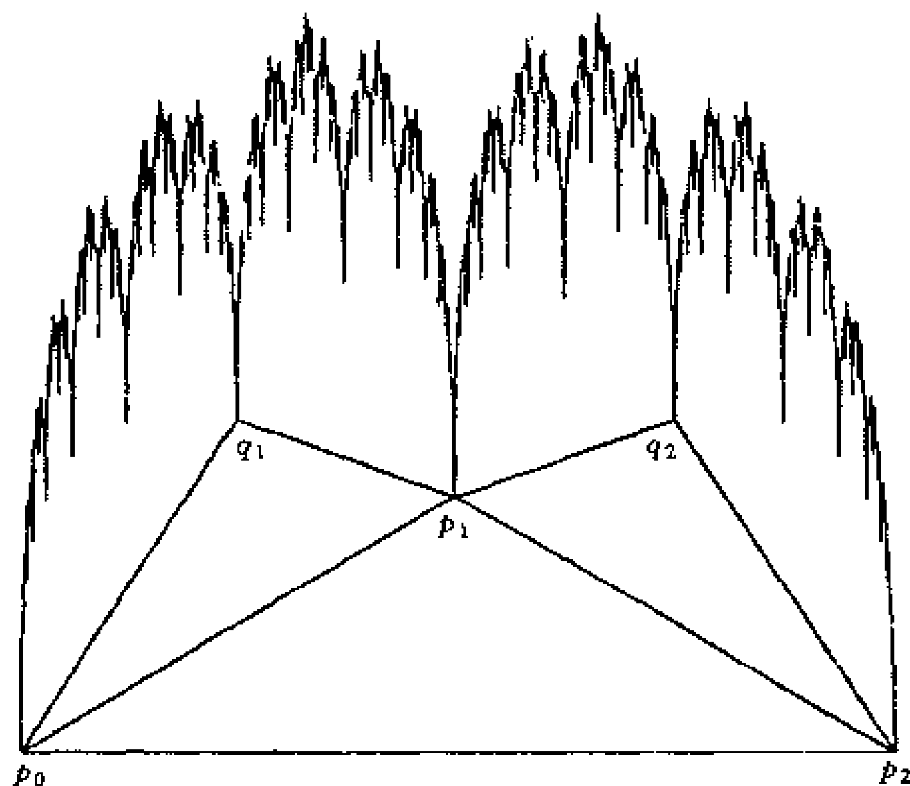
例 3.1.3 中的 IFS 的仿射变换可以推广到 w_n 在 x 方向不是具有相同压缩比的情形。从而，点的分形插值法中所用的间隔不等。为了不失一般性，以下都针对满足条件 $w_n\begin{pmatrix}x_0\\F_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n-1}\\F_{n-1}\end{pmatrix}$，$w_n\begin{pmatrix}x_N\\F_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\F_n\end{pmatrix}$　$n=1, 2, \cdots, N$ 的仿射变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & 0\\c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_n\\f_n\end{pmatrix}$讨论。

设 $n\in\{1,2,\cdots,N\}$，则变换 w_n 由满足如下 4 个方程的五个实数 a_n, c_n, d_n, e_n, f_n 确定

$$a_nx_0+e_n=x_{n-1} \tag{3.1.1}$$



(a)



(b)

图3.1.3　由把三角形 $p_0p_1p_2$ 映射成 $p_0q_1p_1$ 和 $p_1q_2p_2$ 的两个仿射变换定义的自仿射曲线(a)两个变换的垂直压缩比都为 0.7，得 $\dim_B \text{graph} f = 1.49$。(b)垂直压缩比都为 0.8 时，$\dim_B \text{graph} f = 1.68$ 条件(Δ)保证这些直线段相连的结果是某一连续函数 $f:[0,1]\to \boldsymbol{R}$ 的图像

$$a_n x_N + e_n = x_n \tag{3.1.2}$$

$$c_n x_0 + d_n F_0 + f_n = F_{n-1} \tag{3.1.3}$$

$$c_n x_N + d_n F_N + f_n = F_n \tag{3.1.4}$$

显然每个变换中应有一个自由参数，由 d_n 的特殊性，我们自然选此参数为 d_n。

令 d_n 为任意取定的实数，解方程(3.1.1)(3.1.2)(3.1.3)(3.1.4)得：

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} \tag{3.1.1$'$}$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - \frac{d_n(F_N - F_0)}{x_N - x_0} \tag{3.1.2$'$}$$

$$e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0} \tag{3.1.3$'$}$$

$$f_n = \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} - \frac{d_n(F_0 x_N - x_0 F_N)}{x_N - x_0} \tag{3.1.4$'$}$$

现令 $\{\boldsymbol{R}^2; w_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$ 为上述的 IFS，垂直比例因子 d_n 满足 $0 \leqslant d_n < 1$，$n = 1, 2, \cdots, N$。即使在这种条件下，w，$n = 1, 2, \cdots, N$ 也不是欧氏度量下的压缩变换，亦即此 IFS 通常也不是度量空间 $(\boldsymbol{R}^2, \rho_E)$ 上的双曲的 IFS，但它也具有一个吸引子。

定理 3.1.2 设 N 是大于 1 的正整数，则存在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的一个相当于欧几里得度量的度量 ρ，使得关于 ρ，上述 IFS 是双曲型的，特别地，惟一存在一非空紧集 $G \subset \boldsymbol{R}^2$，使 $G = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(G)$

证明 定义 $\boldsymbol{R}^2$ 上的度量 ρ 为：

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \theta |y_1 - y_2|$$

θ 为正实数，将在下面的证明中给定。易证这个度量等价于欧几里得度量。(请读者自行证明)

令 $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$，数 a_n, c_n, e_n, f_n 如方程(3.1.1)$'$(3.1.2)$'$(3.1.3)$'$(3.1.4)$'$所定义。则有：

$\rho(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2))$

$$
\begin{aligned}
&= \rho((a_n x_1 + e_n, c_n x_1 + d_n y_1 + f_n), (a_n x_2 + e_n, c_n x_2 + d_n y_2 + f_n)) \\
&= a_n |x_1 - x_2| + \theta |c_n(x_1 - x_2) + d_n(y_1 - y_2)| \\
&\leqslant (|a_n| + \theta |c_n|)|x_1 - x_2| + \theta |d_n||y_1 - y_2|
\end{aligned}
$$

注意$|a_n| = \dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_N - x_0|} < 1, 0 \leqslant d_n < 1, n = 1, 2, \cdots, N, N > 1$，则如果 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$，取 $\theta = 1$，否则取 $\theta = \dfrac{\min\{1 - |a_n| \ n = 1, 2, \cdots, N\}}{\max\{2|c_n| \ n = 1, 2, \cdots, N\}}$，就有

$$
\begin{aligned}
&\rho(w_n(x_1, y_1), w_n(x_2, y_2)) \\
&\leqslant (|a_n| + \theta |c_n|)|x_1 - x_2| + \theta |d_n||y_1 - y_2| \\
&\leqslant a|x_1 - x_2| + \theta\delta |y_1 - y_2| \\
&\leqslant \max\{a, \delta\} \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))
\end{aligned}
$$

这里令 $a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\max\{|a_n| : n = 1, 2, \cdots, N\}}{2} < 1$

$$\delta = \max\{|d_n| : n = 1, 2, \cdots, N\} < 1$$

从而诸 $w_n, n = 1, 2, \cdots, N$ 是压缩映射，即定理的前一个结论证毕，而后一个结论由前一个结论及定理 2.1.1 自然得到。

记 G 为定理 3.1.2 中的 IFS 的吸引子，则下述定理从理论上证明了假设($\mathscr{L}$)的正确性。

定理 3.1.3 在定理 3.1.2 的条件下，G 是一个插值于数据集 $\{(x_i, F_i), i = 1, 2, \cdots, N\}$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \to \boldsymbol{R}$ 的图像，即 $G = \{(x, f(x)) : x \in [x_0, x_N]\}$

证明 令 $\mathscr{F}$ 是使 $f(x_0) = F_0, f(x_N) = F_N$ 的连续函数 $f: [x_0, x_N] \to \boldsymbol{R}$ 的集合，定义 $\mathscr{F}$ 上的度量 ρ 为：

$$\rho[f, g] = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [x_0, x_N]\}$$

对所有的 $f, g \in \mathscr{F}$ 成立。

易见$(\mathscr{F}, \rho)$是一个完备的度量空间。

令实数 a_n, c_n, e_n, f_n 如方程(3.1.1)(3.1.2)(3.1.3)(3.1.4)所

定义，下面我们将构造度量空间$(\mathscr{F},\rho)$上的一个压缩映射 $T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$，然后证明 T 在 $\mathscr{F}$中的惟一的不动点即为所求的连续函数。

首先，令映射 $T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 为

$(Tf)(x)=c_n l_n^{-1}(x)+d_n f(l_n^{-1}(x))+f_n \quad \forall x\in[x_{n-1},x_n]$

$n=1,2,\cdots,N$，其中 $l_n:[x_0,x_N]\to[x_{n-1},x_n]$是可逆变换。$l_n(x)=a_n x+e_n$

分两步证明 T 是度量空间$(\mathscr{F},d)$上的压缩映射。

(ⅰ)T 将 $\mathscr{F}$映成它自己。

令 $f\in\mathscr{F}$，则函数$(Tf)(x)$满足端点条件。事实上，

$$
\begin{aligned}
(Tf)(x_0)&=c_1 l_1^{-1}(x_0)+d_1 f(l_1^{-1}(x_0))+f_1\\
&=c_1 x_0+d_1 f(x_0)+f_1\\
&=c_1 x_0+d_1 F_0+f_1\\
&=F_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(Tf)(x_N)&=c_N l_N^{-1}(x_N)+d_N f(l_N^{-1}(x_N))+f_N\\
&=c_N x_N+d_N f(x_N)+f_N\\
&=c_N x_N+d_N F_N+f_N\\
&=F_N
\end{aligned}
$$

可以证明$(Tf)(x)$在区间$[x_{n-1},x_n]$，$n=1,2,\cdots,N$ 连续，亦即在每点 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{N-1}$上$(Tf)(x)$连续，因为对每一 $n\in\{1,2,\cdots,N-1\}$有

$$
\begin{aligned}
(Tf)(x_n)&=c_{n+1}l_{n+1}^{-1}(x_n)+d_{n+1}f(l_{n+1}^{-1}(x_n))+f_{n+1}\\
&=c_{n+1}x_0+d_{n+1}f(x_0)+f_{n+1}\\
&=F_n\\
&=c_n x_N+d_n f(x_N)+f_n\\
&=c_n l_n^{-1}(x_n)+d_n f(l_n^{-1}(x))+f_n\\
&=(Tf)(x_n)
\end{aligned}
$$

所以，T 确实映 $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}$。

(ⅱ)$T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$为一个压缩映射。

令 $f,g\in\mathscr{F}$，$n\in\{1,2,\cdots,N\}$，$x\in[x_{n-1},x_n]$，则

$$|(Tf)(x)-(Tg)(x)|=|d_n||f(l_n^{-1}(x)-g(l_n^{-1}(x))|$$
$$\leqslant|d_n|d(f,g)$$

令 $\delta=\max\{|d_n|:n=1,2,\cdots,N\}<1$,则

$$d(Tf,Tg)\leqslant\delta d(f,g)$$

从而,由压缩映射原理,T 在 $\mathscr{F}$ 中有惟一一个不动点,即存在 $f\in\mathscr{F}$,使 $(Tf)(x)=f(x)$,对一切 $x\in[x_0,x_N]$ 成立。

往证:若 $f\in\mathscr{F}$,则 Tf 是一个关于数据集 $\{(x_i,F_i),i=0,1,2,\cdots,N\}$ 的插值函数。

对 $\forall n\in\{0,1,2,\cdots,N\}$,有

$$\begin{aligned}(Tf)(x_{n-1})&=c_nl_n^{-1}(x_{n-1})+d_nf(l_n^{-1}(x_{n-1}))+f_n\\&=c_n\frac{x_{n-1}-l_n}{a_n}+d_nf\left(\frac{x_{n-1}-l_n}{a_n}\right)+f_n\\&=c_nx_0+d_nf(x_0)+f_n\\&=\frac{x_NF_{n-1}-x_0F_{n-1}}{x_N-x_0}\\&=F_{n-1}\end{aligned}$$

故 f 是关于此数据集的插值函数,即 f 通过那些插值点。

最后,令 $\tilde{G}$ 为 f 的图像,注意到:

$$(Tf)(a_nx+e_n)=c_nx+d_nf(x)+f_n$$
$$x\in[x_0,x_N],n=1,2,\cdots,N$$

故:对 $\forall n\in\{1,2,\cdots,N\}$,有

$$\begin{aligned}w_n\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a_n&0\\c_n&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_n\\f_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_nx+e_n\\c_nx+d_nf(x)+f_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_nx+e_n\\(Tf)(a_nx+e_n)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_nx+e_n\\f(a_nx+e_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

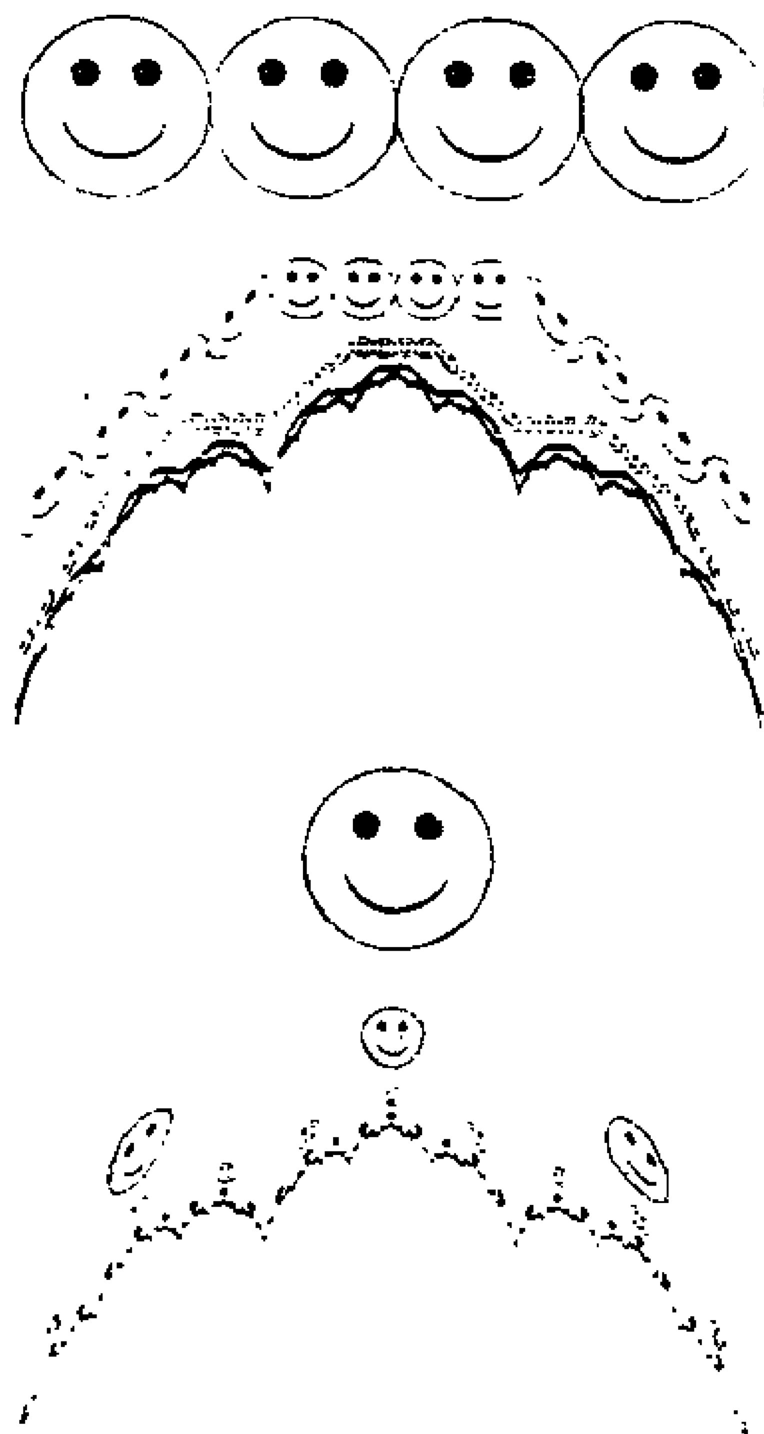


图 3.1.4 (a),(b)在豪斯道夫度量下，集序列$\{A_n\}$收敛到一分形插值函数图像的例子

随着 x 在$[x_0, x_N]$上变动，此方程的右端产生 $f(x)$图像在$[x_{n-1}, x_n]$上的部分，即 $\tilde{G}=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(\tilde{G})$，因 $\tilde{G}$ 是非空紧子集，由定理

3.1.2,存在惟一非空紧集 G 即上述 IFS 的吸引子,满足 $G=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(G)$,故 $\tilde{G}=G$。

定义 3.1.2 函数 $f(x)$的图像若是上述定理 3.1.2 及定理 3.1.3 中所描述的 IFS 的吸引子,则称 $f(x)$为相应于数据集$\{(x_i, F_i), i=1,2,\cdots,N\}$的分形插值函数。

与数据集$\{(x_i, F_i), i=0,1,2,\cdots,N\}$相关的 IFS$\{R: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$如果是双曲型的,则 $\forall A_0 \in \mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)$可以引导出一个在豪斯道夫度量下收敛到 G 的哥西集序列,一般来讲,对一切 $B\in\mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)$,我们定义 $W:\mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)\to\mathscr{H}(\boldsymbol{R}^2)$为 $W(B)=\bigcup_{n=1}^{N} w_n(B)$,则$\{A_n=W^n(A_0)\}$是一个豪斯道夫度量下收敛于 G 的哥西集序列,如果 A_0 是某一函数 $f_0\in\mathscr{F}$的图像,那么 A_n 为 $T^n\mathscr{F}$的图像,如图。

图 3.1.5 则是一个关于定理 3.1.3 中介绍的压缩映射 T 的迭代序列$\{T^n f_0: n=0,1,2,,3\cdots\}$,其中初始函数 $f_0(x)$是线性的,这个序列收敛到一个为 T 的不动点的分形插值函数。

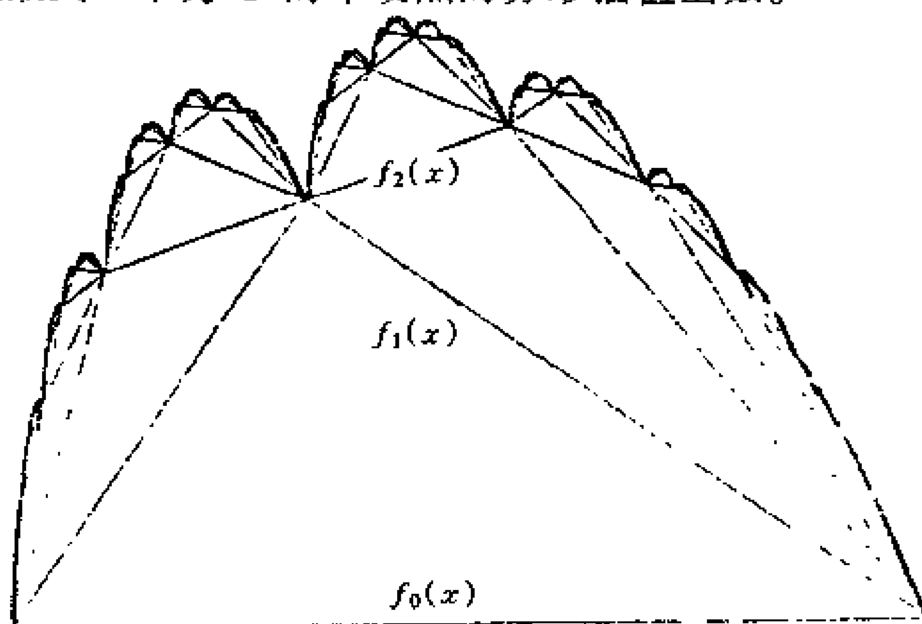


图 3.1.5 函数序列$\{f_{n+1}(x)=(Tf_n)(x)\}$收敛到定理 3.1.3 证明中用到的映射 $T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$的不动点的例子

概括地讲，如果想得到具有给定维数并且经过点$\left(\frac{n}{N}, x_n\right)$，$n=0,1,\cdots,N$ 的分形曲线，通过例 3.1.3 式(3.1.0)的变换，会得到一个通过给定点的某 IFS 的吸引子，对每一个 n，w_n 将直线段$[p_1, p_N]$映成直线段$\left[\left(\frac{n-1}{N}, y_{n-1}\right), \left(\frac{n}{N}, y_n\right)\right]$，通过调整矩阵的表值，可以使曲线具有所需要的盒维数。

3.2 分形插值函数的分维与积分

这一节，将从理论上说明分形插值函数的分形维数与相应的 IFS 变换中矩阵表值的关系。

定理 3.2.1 在定理 3.1.3 的条件下，吸引子 G 是相应的分形插值函数的图像。如果

$$\sum_{n=1}^{N} |d_n| > 1 \tag{3.2.1}$$

且插值点不全在同一条直线上，则 G 的分形维数是方程 $\sum_{n=1}^{N} |d_n| a_n^{D-1} = 1$ 的惟一实解；否则，G 的分形维数是 1。

此定理的证明可以在参考文献[10]中找到，这里只是以一种便于读者理解的方式简单地说明一下证明思路。

引用一个比 $\sum_{n=1}^{N} |d_n| > 1$ 更强的假设来简化讨论，即设$|d_n| > a_n$，$n=1,2,\cdots,N$，(注意 $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0} = 1$，显然此假设比 $\sum_{n=1}^{N} |d_n| > 1$ 强)。

令 $\epsilon > 0$，考虑 G 位于边长为 ϵ 的闭正方形格子网上(如图 3.2.1)，令 $N(\epsilon)$为与 G 相交的盒子数目。这些盒子与计盒定理中用到的盒子类似，只是后者的边长为任意的，可设 G 具有分形维数 D，它满足 $N(\epsilon) = c \cdot \epsilon^{-D}$，$\epsilon \to 0$，令 $n \in \{1,2,\cdots,N\}$，$N_n(\epsilon)$是与



图 3.2.1　分形插值函数的图像 G 被置于边长为 ϵ 的闭正方形网格中，$N(\epsilon)$ 为与 G 相交的格子数，此时 $N(\epsilon)=61$。

$w_n(G)$相交的盒子数，若 ϵ 与$|x_N-x_0|$相比非常小，由于 IFS 是刚触及的，从而可作如下近似

$$N(\epsilon)=N_1(\epsilon)+N_2(\epsilon)+N_3(\epsilon)+\cdots+N_N(\epsilon) \qquad (3.2.2)$$

如图 3.2.2 所示，与 G 相交的盒子可以按着集排序为$\{c_j(\epsilon):j=1,2,\cdots,\mathscr{H}(\epsilon)\}$，其中$\mathscr{H}(\epsilon)$是柱集的总数。在方程(3.2.1)的条件下，可以证明：当 $\epsilon\to0$ 时，每个柱集中的最少盒子数增加且没有极限。当仿射变换 w_n 作用于柱集$c_j(\epsilon)$时，它变成宽为 $a_n\epsilon$，高为$|d_n|$乘以变换前的柱集的高的一个平行四边形柱集。令 $N(c_j(\epsilon))$为柱集 $c_j(\epsilon)$中的盒子数目，则 $w_n(c_j(\epsilon))$可以认为由大约$\dfrac{|d_n|N(c_j(\epsilon))}{a_n}$个与 $w_n(G)$相交的边长为 $a_n(\epsilon)$的正方形盒子组成。故如图 3.2.3 有：

$$N_n(a_n,\epsilon)\simeq\sum_{j=1}^{\mathscr{H}(\epsilon)}\frac{|d_n|N(c_j(\epsilon))}{a_n}=\frac{|d_n|}{a_n}\sum_{j=1}^{\mathscr{H}(\epsilon)}N(c_j(\epsilon))$$

$$= \frac{|d_n|}{a_n} N(\varepsilon)$$

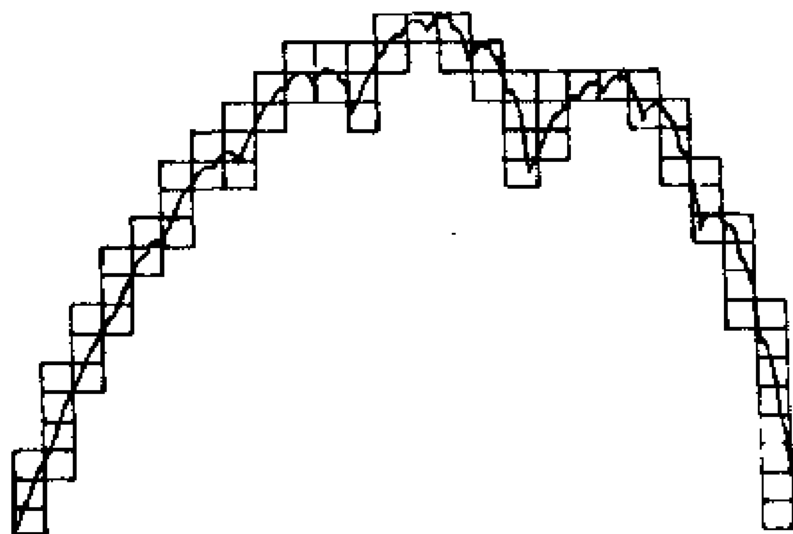


图 3.2.2 与 G 相交的格子可以按着集排序，与 G 相交的边长为 ε 的格子的柱集的集合记为 $\{c_j(\varepsilon): j = 1, 2, \cdots, \mathscr{H}(\varepsilon)\}$，其中 $\mathscr{H}(\varepsilon)$ 为柱集数，此图中 $\mathscr{H}(\varepsilon) = 25$，而 $c_4(\varepsilon)$ 中的格子数为 3

从而，当 ε 与 $[x_0, x_t]$ 相比极小时，将(3.2.3)代入(3.2.2)中，有

$$N_n(\varepsilon) \simeq \frac{|d_n|}{a_n} N\left(\frac{\varepsilon}{a_n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots, N \qquad (3.2.3)$$

$$N(\varepsilon) \simeq \frac{|d_1|}{a_1} N\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{|d_2|}{a_2} N\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) + \cdots + \frac{|d_N|}{a_N} N\left(\frac{\varepsilon}{a_N}\right)$$

由假设有

$$\varepsilon^{-D} \simeq |d_1| a_1^{D-1} \varepsilon^{-D} + |d_2| a_2^{D-1} \varepsilon^{-D} + \cdots + |d_N| a_N^{D-1} \varepsilon^{-D}$$

即

$$1 \simeq \sum_{n=1}^{N} |d_n| a_n^{D-1}$$

若插值点都在同一条直线上，则 IFS 的吸引子是连接点 (x_0, F_0) 及 (x_N, F_N) 的线段，从而，分形维数是 1；如果 $\sum_{n=1}^{N} |d_n| \leqslant 1$。则 $N(\varepsilon)$ 为 ε^{-1} 的常数倍，故所求的分形维数也是 1。

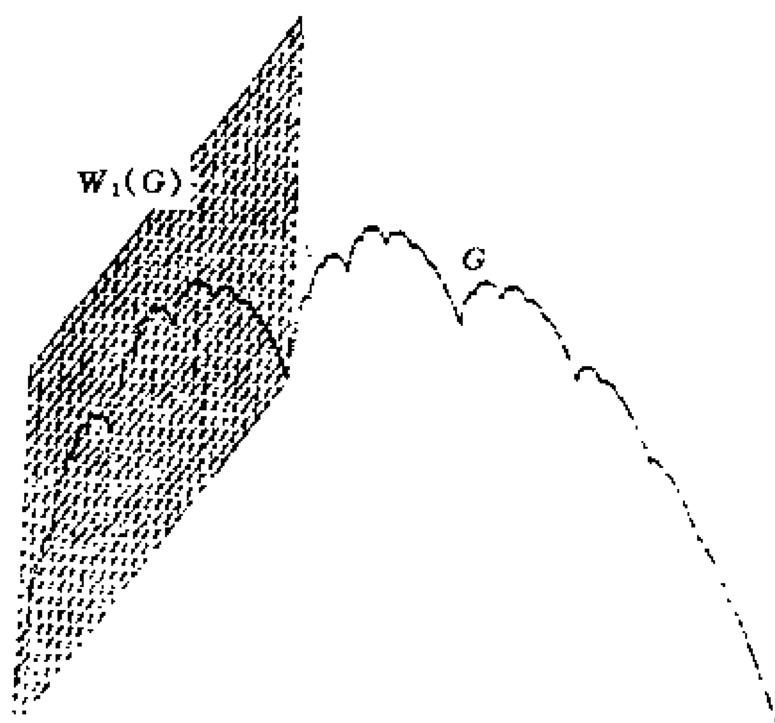


图 3.2.3　当剪切变换 w_1 作用于覆盖图 G 的格子柱集时，得到一个覆盖 $w_1(G)$ 边长为 $a_1\epsilon$ 更薄的柱集的集合，这些新柱集由小平行四边形组成

例 3.2.1　考虑例 3.1.3 中插值点等距分布的情况下，分形插值函数的分形维数。

此时，$a_n=\dfrac{1}{N}$，$n=1,2,\cdots,N$。如果定理 3.2.1 中的条件满足，则分形插值函数的分形维数 D 满足方程

$$\sum_{n=1}^{N}|d_n|\left(\frac{1}{N}\right)^{D-1}=\left(\frac{1}{N}\right)^{D-1}\sum_{n=1}^{N}|d_n|=1$$

即

$$D=1+\frac{\log\left(\sum\limits_{n=1}^{N}|d_n|\right)}{\log(N)}$$

显然，除了插值点不全在同一条直线上的限制外，分形维数不依赖于值 F_i，$i=0,1,2,\cdots,N$。注意到 $|d_n|<1$，$n=1,2,3,\cdots,N$，故

$\sum_{n=1}^{N} |d_n| < N$,从而 $D < 2$;而且,如果定理 3.2.1 的条件满足,即 $\sum_{n=1}^{N} |d_n| > 1$,则有 $D>1$。因此,只要插值点的个数给定,可以通过调整 IFS 变换的矩阵的表值,实际上就是调整垂直比例因子 d_n, $n=1,2,\cdots,N$ 的值,使与数据集 $\{x_i, F_i\}: i=0,1,\cdots,N\}$ 相关的分形插值函数的分形维数任意地接近于 2 和 1,如果垂直比例因子满足:$\sum_{n=1}^{N} |d_n| = N^{D-1}$ 时,还可以得到一族具有相同的分形维数并且插值于同一个数据集的分形插值函数。

由于分形插值函数是某一连续函数的图像,要研究它的维数,有必要先讨论函数图像的维数。

定义函数 $f:[a,b]\to R$ 的图为

$$\mathrm{graph}f = \{(x, f(x)): a \leqslant x \leqslant b\}$$

如果 f 是连续可微的,则 $\mathrm{graph}f$ 的维数是 1;如果 f 是有界变差的,即对任意的分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})|$ 小于或等于某个常数,则 $\mathrm{graph}f$ 的维数也是 1。但是,有的连续函数可能是相当不规则的,并且具有维数严格大于 1 的图。如函数 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{k}{2}} \cdot \sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k} x\right)$,它的图具有精细的结构,却不像光滑的曲线那样可以用经典的微积分来研究,实际上,这个函数是处处不可微的连续函数,它的盒维数等于$\frac{3}{2}$,并且一般也相信它的豪斯道夫维数仍为 3/2。

下面导出一些虽简单却能广泛应用的关于函数图的盒维数的估计。

设已给定函数 f 和区间$[x_1, x_2]$,记 M_f 是 f 在区间$[x_1, x_2]$上的最大变化范围,即

$$M_f[x_1, x_2] = \sup_{x_1 \leqslant x, y \leqslant x_2} |f(x) - f(y)|$$

定理 3.2.2 设 $f:[0,1]\to R$ 是连续函数，$0<\delta<1$，并且，N 是大于或者等于 $1/\delta$ 的最小整数。考虑 graph$f$ 位于边长为 δ 的闭正方形格子网上，$N(\delta)$是与 graph$f$ 相交的正方形个数，则

$$\delta^{-1}\sum_{i=1}^{N-1}M_f[i\delta,(i+1)\delta]\leqslant N(\delta)$$

$$\leqslant 2N+\delta^{-1}\sum_{i=0}^{N-1}M_f[i\delta,(i+1)\delta] \qquad (3.2.4)$$

证明 由 f 的连续性知：在区间$[i\delta,(i+1)\delta]$之上的柱集内与 graph$f$ 相交的边长为 δ 的正方形格子个数最少为 $M_f[i\delta,(i+1)\delta]/\delta$，最多为 $2+M_f[i\delta,(i+1)\delta]/\delta$ 个，对所有的这样的区间求和，即得式(3.2.4)。如图 3.2.4 所示。

推论 3.2.3 设 $f:[0,1]\to R$ 连续，

(a) 设 $|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|^{2-s}\quad(0\leqslant x,y\leqslant 1)$

$$(3.2.5)$$

其中 $c>0$，$1\leqslant s\leqslant 2$，则 $\mathscr{H}^s(F)<\infty$，并且 $\dim_H\text{graph}f\leqslant\dim_B\text{graph}f\leqslant s$。

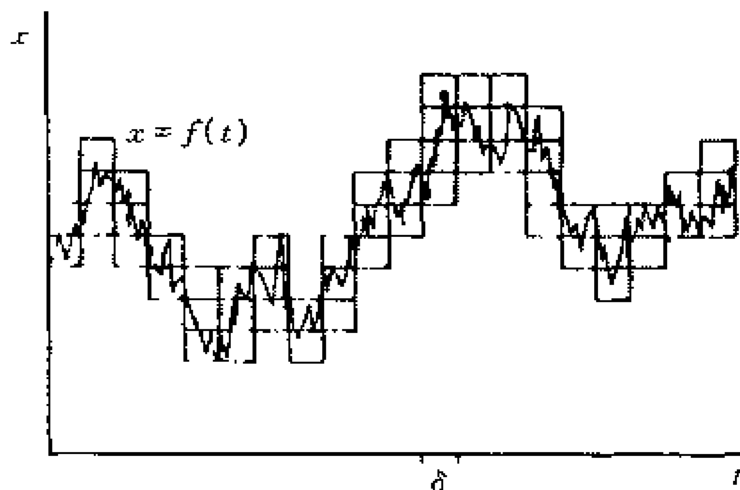


图 3.2.4 在宽度为 δ 的区间上面的柱集内，与 f 的图相交的正方形格子个数近似等于 f 的变化范围，对这些个数求和便给出了 graph$f$ 的盒维数的估计

如果对某一 $\delta>0$，当 $|x-y|<\delta$ 时式(3.2.5)成立，则上述结论仍然成立。

(b) 设存在数 $c>0$, $\delta_0>0$ 及 $1\leqslant s\leqslant 2$, 使得对每个 $x\in[0,1]$和 $0<\delta\leqslant\delta_0$, 存在 y 满足 $|x-y|\leqslant\delta$ 及

$$|f(x)-f(y)|\geqslant c\delta^{2-s} \tag{3.2.6}$$

则

$$s\leqslant\dim_{B}\mathrm{graph}f$$

证明:

(a) 从式(3.2.5)立即有:对 $0\leqslant x_1, x_2\leqslant 1$

$$M_f[x_1,x_2]\leqslant c|x_1-x_2|^{2-s}$$

利用定理 3.2.2 中的记号, $N<1+\delta^{-1}$, 故

$$N(\delta)\leqslant(1+\delta^{-1})(2+c\delta^{-1}\delta^{2-s})\leqslant c_1\delta^{-s}$$

其中 c_1 与 δ 无关。

从而,由推论 3.2.3 即得结论。

(b) 以同样的方法,讨论式(3.2.6),则意味着

$$M_f[x_1,x_2]\geqslant c|x_1-x_2|^{2-s}$$

因为 $\delta^{-1}\leqslant N$, 由式(3.2.6),有:

$$N(\delta)\geqslant\delta^{-1}\delta^{-1}c\delta^{2-s}=c\delta^{-s}$$

所以有: $s\leqslant\dim_{B}\mathrm{graph}f$。

这个推论便是定理 3.2.2 应用到满足 Hölder 条件的函数上得出的结论,而且可以证明满足(b)的任何函数必然处处不可微。然而,函数图像的豪斯道夫维数的下界的估计相对于盒维数来讲是极其不容易找到的。

下面通过另外的途径给出例 3.2.1 的结论的证明。

设

$$A_n=\begin{bmatrix}\frac{1}{N} & 0\\ c_n & d_n\end{bmatrix}$$

并且 $I_{n_1\cdots n_k}$是那些以 N 为底的展开式为 $0.n'_1\cdots n'_k$ 的 x 组成的 x—轴上的区间,其中 $n'_j=n_j-1$。则 $F=\mathrm{graph}f$ 在 $I_{n_1\cdots n_k}$上面的部分

是仿射变换的像 $w_{n_1}\circ\cdots\circ w_{n_k}(F)$，它是 $A_{n_1}\cdot\cdots\cdot A_{n_k}F$ 的平移。容易导出表示 $A_{n_1}\cdot\cdots\cdot A_{n_k}$ 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} N^{-k} & 0 \\ N^{1-k}c_{n_1}+N^{2-k}c_{n_2}d_{n_1}+\cdots+c_{n_k}d_{n_1}\cdots d_{n_k}, & d_{n_1}d_{n_2}\cdots d_{n_k} \end{bmatrix}$$

这个剪切映射以压缩比 $d_{n_1}d_{n_2}\cdots d_{n_k}$ 压缩垂直于 x 轴的直线，可见，上述矩阵左下角的元素以下面的数为界：

$$\begin{aligned} &|N^{1-k}c+N^{2-k}c+\cdots+d_{n_1}\cdots d_{n_{k-1}}c| \\ &\leqslant((Nd)^{1-k}+(Nd)^{2-k}+\cdots+1)d_{n_{k-1}}\cdots d_{n_1}c \\ &\leqslant rd_{n_1}\cdots d_{n_k} \end{aligned}$$

其中 $c=\max|c_n|$，$d=\max|d_n|>\dfrac{1}{N}$，$r=\dfrac{c}{(1-(Nd)^{-1})}$，从而，$A_{n_1}\cdot\cdots\cdot A_{n_k}(F)$ 包含在一个高为 $(r+h)d_{n_1}\cdots d_{n_k}$ 的矩形中，h 是 F 的高。

又如果 q_1,q_2,q_3 是从 $w_1(p_1)\cdots w_N(p_1)$，p_N 中选出的不共线的三个点，则 $A_{n_1}\cdot\cdots\cdot A_{n_k}(F)$ 含有点 $A_{n_1}\cdot\cdots\cdot A_{n_k}(q_j)(j=1,2,3)$，以这三个点为顶点的三角形的高至少为 $d_{n_1}\cdots d_{n_k}e$，这里的 e 是从 q_2 点到直线段 $[q_1,q_3]$ 的垂直距离，故函数 f 在 $I_{n_1\cdots n_k}$ 上满足

$$ed_{n_1}\cdots d_{n_k}\leqslant M_f[I_{n_1\cdots n_k}]\leqslant r_1d_{n_1}\cdots d_{n_k}$$

其中 $r_1=r+h$。

对于固定的 k，对 N^k 个长度为 N^{-k} 的区间 $I_{n_1\cdots n_k}$ 求和，由定理 3.2.2，有

$$N^ke\sum d_{n_1}\cdots d_{n_k}\leqslant M_N^{-k}(F)\leqslant 2N^k+N^kr_1\sum d_{n_1}\cdots d_{n_k}$$

这里 $M_N^{-k}(F)$ 是与 graph$f$ 相交的边长为 N^{-k} 的正方形格子的个数。对每个 j，c_{n_j} 取遍所有 N 个值 $d_1\cdots d_N$，故 $\sum d_{n_1}\cdots d_{n_k}=(d_1+\cdots+d_N)^k$。

从而

$$eN^k(d_1+\cdots+d_N)^k\leqslant M_N^{-k}(F)\leqslant 2N^k+r_1N^k(d_1+\cdots+d_N)^k$$

取对数后由盒维数的等价定义得到结论。

注意由定理 3.2.2 可以得出如下有用的结论：如果 $f, g:[0,1]\to R$ 是图的盒维数存在的连续函数，只要它们的盒维数不相等，便有

$$\dim_B \text{graph}(f+g)=\max(\dim_B \text{graph} f, \dim_B \text{graph} g)$$

为了完善关于分形插值函数的讨论，再介绍一种计算分形插值函数积分的方法。

设 $f(x)$ 是一个关于数据集 $\{(x_i, F_i): i=0,1,2,\cdots,N\}$ 的分形插值函数，$N>1$，度量空间 $(\mathscr{F}, d)$ 及变换 $T:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ 如定理 3.1.3 之证明中定义，故有 $Tf=f$。注意到由分形插值函数的定义，$f(x)$ 是连续的，从而，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_N} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^{x_N} (Tf)(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_{n-1}}^{x_n} (Tf)(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} (c_n x + d_n f(x) + f_n) d(a_n x + e_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} a_n (c_n x + d_n f(x) + f_n)\mathrm{d}x \\
&= \alpha I + \beta
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = \sum_{n=1}^{N} a_n d_n \quad \beta = \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{x_0}^{x_N} (c_n x + f_n)\mathrm{d}x$

在定理3.1.3的条件下有 $|\alpha| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n\cdot d_n| < 1$，$\sum_{n=1}^{N} |a_n| = 1$，若设 $f_0(x)$ 是关于上述数据集的分段线性插值函数时，则：

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f_0(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[F_{n-1} + \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(F_n - F_{n-1})\right]\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} \left[F_{n-1} + \frac{x - x_0}{x_N - x_0}(F_n - F_{n-1})\right]d(a_n x + e_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} a_n(c_n x + f_n)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{x_0}^{x_N} (c_n x + f_n)\mathrm{d}x \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

故可以得出

$$
I = \frac{\beta}{1 - \alpha}
$$

例 3.2.2 找出计算积分 $I' = \int_{x_0}^{x_N} xf(x)\mathrm{d}x$ 的公式

解

$$
\begin{aligned}
I' &= \int_{x_0}^{x_N} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_0}^{x_N} x(Tf)(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_{n-1}}^{x_n} x(Tf)(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} x(c_n x + d_n f(x) + f_n)d(a_n x + e_n) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} a_n x(c_n x + d_n f(x) + f_n)\mathrm{d}x \\
&= \alpha I + \beta'
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha = \sum_{n=1}^{N} d_n a_n \quad \beta' = \sum_{n=1}^{N}\int_{x_0}^{x_N} a_n x(c_n x + f_n)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_N} xf_0(x)\mathrm{d}x$

例 3.2.3 计算例 3.1.1 中描述的抛物线的积分

解:$f_0(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 2-x & x\in[1,2] \end{cases}$

故

$$\beta=\int_0^2 f_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=1$$

而且

$$2\sum_{n=1}^{2}a_n d_n=0.25\times0.5+0.5\times0.25=0.25$$

因此

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\beta}{1-\alpha}=\frac{4}{3}$$

对原抛物线直接积分,显然结果一致,这里只是作一个具体计算的简单例子。

3.3 广义分形插值函数

令(Y,ρ_Y)为一个完备度量空间

定义 3.3.1 令 $I\subset R$, $f:I\rightarrow Y$ 是一个函数,点集 $G=\{(x,f(x))\in \boldsymbol{R}\times Y:x\in I\}$叫做 f 的图。

定义 3.3.2 广义数据集是一个具有形式$\{(x_i,F_i)\in\boldsymbol{R}\times Y:i=0,1,2,\cdots,N\}$的点集,其中 $x_0<x_1<\cdots<x_N$,相应于这个数据集的插值函数是一个连续函数 $f:[x_0,x_N]\rightarrow Y$, $f(x_i)=F_i$, $i=1,2,\cdots,N$, $(x_i,F_i)\in\boldsymbol{R}\times Y$ 叫做插值点。

令 X 是笛卡尔乘积空间$\boldsymbol{R}\times Y$, θ 是一个正数,定义 X 上的度量ρ 为:

$\rho(x_1,y_1)=|x_1-x_2|+\theta\rho_Y(y_1,y_2)$,对 X 中所有的点

$$X_1=(x_1,y_1),\quad X_2=(x_2,y_2) \tag{3.3.1}$$

成立,则(X,ρ)是一完备度量空间。

设 N 是一个大于 **1** 的整数，给定一广义数据集$\{(x_i, F_i) \in X, i = 0, 1, \cdots, N\}$，$n \in \{1, 2, \cdots, N\}$。

定义 $L_n: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 为

$$L_n(x) = a_n x + e_n \tag{3.3.2}$$

其中 $a_n = \dfrac{(x_n - x_{n-1})}{x_N - x_0}$　$e_n = \dfrac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}$使得

$$L_n = ([x_0, x_N]) = [x_{n-1}, x_n]$$

令 c 和 s 是实数且 $c > 0, 0 < s < 1$，对每一 $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$，$M_n: X \to Y$ 满足

$$\rho_Y(M_n(a, y), M_n(b, y)) \leqslant c|a - b| \tag{3.3.3}$$

一切 $a, b \in \boldsymbol{R}, y \in Y$

$$\rho_Y(M_n(x, a), M_n(x, b)) \leqslant s\rho_Y(a, b) \tag{3.3.4}$$

对一切 $a, b \in Y, x \in R$

定义一变换 $w_n: X \to X$ 为：$w_n(x, y) = (L_n(x), M_n(x, y))$对一切$(x, y) \in X, n = 1, 2, \cdots, N$。

定理 3.3.1　设 IFS 如定理 3.1.3 定义，$N > 1$，存在常数 s 及 c 使 $0 \leqslant s < 1, c > 0$，且满足(3.3.3)和(3.3.4)方程，(3.3.1)中的常数 $\theta = \dfrac{1 - a}{2c}$，$a = \max\{a_i: i = 1, 2, \cdots, N\}$，则 IFS$\{X; w_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$关于度量 ρ 是双曲型的。

证明　与定理 3.1.2 的证明相似，详细证明可见参考文献[10]。

限制条件

$$M_n(x_0, F_0) = F_{n-1}, M_n(x_N, F_N) = F_n, \quad n = 1, 2, \cdots, N \tag{3.3.5}$$

即

$$w_n(x_0, F_0) = (x_{n-1}, F_{n-1}), w_n(x_N, F_N) = (x_n, F_n)$$
$$n = 1, 2, \cdots, N$$

则上述 IFS$\{X; w_n, n = 1, 2, \cdots, N\}$的吸引子插值于数据集。

定理 3.3.2　在定理 3.3.1 的条件下，设 $G \in \mathscr{H}(X)$是此 IFS 的

吸引子，并且满足(3.3.5)，则 G 是插值于数据集$\{(x_i, F_i): i=1,2,\cdots,N\}$的连续函数 $f:[x_0, x_N]\to Y$ 的图像，即 $G=\{(x, f(x)): x\in[x_0, x_N]\}$，其中 $f(x_i)=F_i, i=0,1,2,\cdots,N$。

证明 可见参考文献[10]，证明与定理 3.1.3 的证明类似。

定义 3.3.3 图像为如定理 3.3.1 及定理 3.3.2 中描述的 IFS 的吸引子的函数叫做对应于广义数据集$\{(x_i, F_i): i=1,2,\cdots,N\}$的广义分形插值函数。

应用广义分形插值函数的思想可以构造比以前更精细的插值函数。例如：用 $\boldsymbol{R}^3$ 上的仿射变换构造一个广义分形插值函数，则它在 $\boldsymbol{R}^2$ 上的投影是插值于数据集$\{(x_i, F_i)\in\boldsymbol{R}^2: i=1,2,\cdots,N\}$的函数图像，由 $\boldsymbol{R}^3$ 提供的多余的自由度给了我们“隐”变量，“隐”变量可以用来调整插值函数的形状及分形维数。

如果 N 是大子 1 的整数，给定数据集$\{(x_i, F_i)\in\boldsymbol{R}^2: i=0,1,2,\cdots,N\}$，$\{H_i, i=0,1,2,\cdots,N\}$是一个实参数集(暂时设这些参数固定)，则定义一个广义数据集为$\{(x_i, F_i, H_i)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^2: i=0,1,2,\cdots,N\}$，在定理 3.3.2 中，令$(Y, \rho_Y)$为$(\boldsymbol{R}^2, \rho_E)$，考虑对 $n\in\{1,2,\cdots,N\}$，映射 $w_n:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ 是具有特殊结构

$$w_n=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_n&0&0\\c_n&d_n&h_n\\k_n&l_n&m_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_n\\f_n\\g_n\end{bmatrix}$$

的仿射变换的 IFS$\{\boldsymbol{R}^3; w_n, n=1,2,\cdots,N\}$。其中 $a_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n, k_n, l_n$ 及 m_n 为实数，且满足限制

$$w_n\begin{bmatrix}x_0\\F_0\\H_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{n-1}\\F_{n-1}\\H_{n-1}\end{bmatrix} \text{及 } w_n\begin{bmatrix}x_N\\F_N\\H_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\F_n\\H_n\end{bmatrix}\quad n=1,2,\cdots,N$$

对一切$(x, y, z)\in\boldsymbol{R}^3$，记：$w_n(x, y, z)=(L_n(x), M_n(x, y, z))$，$n=1,2,\cdots,N$，其中 $L_n(x)$如方程(3.3.2)中定义，$M_n:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ 定义如下

$$M_n\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A_n\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f_n+c_nx\\g_n+k_nx\end{pmatrix}$$

$$A_n=\begin{pmatrix}d_n & h_n\\l_n & m_n\end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

$$n=1,2,\cdots,N$$

在条件(3.3.5)中用(F_n, H_n)代替 F_n,则 M_n 满足条件(3.3.5)。若定义 $c=\max\{\max\{(c_i, k_i): i=1,2,\cdots,N\}$ 则条件(3.3.3)为真。最后,若设线性变换 $A_n: \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ 为压缩的,压缩因子为 $0\leqslant s<1$,则条件(3.3.4)成立。从而,在这些条件下,IFS$\{\boldsymbol{R}^3: w_n, n=1,2,\cdots,N\}$满足定理3.3.2的条件。故此IFS的吸引子是使 $f_1(x_i)=F_i$, $i=1,2,\cdots,N$ 的连续函数 $f:[x_0, x_N]\to\boldsymbol{R}^2$ 的像。令 $f(x)=(f_1(x), f_2(x))$,则 $f_1:[x_0, x_N]\to\boldsymbol{R}$ 是使得 $f_1(x_i)=F_i$, $i=1,2,\cdots,N$ 的连续函数。

定义3.3.4 称前面所说的函数 $f_1:[x_0, x_N]\to\boldsymbol{R}$ 为与数据集$\{(x_i, F_i)\in\boldsymbol{R}^2: i=1,2,\cdots,N\}$相关的隐变量分形插值函数。

关于隐变量分形插值,值得注意的一点是:尽管其中的IFS的吸引子是仿射变换作用此吸引子之后的并,但当用“吸引子的投影”来代替“吸引子”时,情况通常不是这样,隐变量分形插值函数的图像通常不具有某种自相似或自仿射等形式。

隐变量分形插值的思想能够通过“隐”维数扩展开来,随着维数的增加,在平面上函数本身越来越随机。

定理3.3.3 设 $A\subset\boldsymbol{R}^2$ 是一个满足下述条件的非空道路连通紧集,N 是大于1的整数,如果存在以 A 为吸引子的双曲型IFS $\{\boldsymbol{R}^2: M_n, n=1,2,\cdots,N\}$及满足

$$M_n(F_0, H_0)=(F_{n-1}, H_{n-1})$$

$$M_n(F_N, H_N)=(F_n, H_n) \quad n=1,2,\cdots,N$$

的不同点的一个集合$\{F_i, G_i)\in A$, $i=0,1,2\cdots,N\}$,则存在一个使

$f([0,1])=A$ 的连续函数 $f:[0,1]\to \boldsymbol{R}^2$，其图像为 IFS

$$\{\boldsymbol{R}^3: w_n(x,y,z)\} = \left\{\frac{1}{N}x+\frac{n-1}{N}, M_n(y,z), n=1,2,\cdots,N\right\}$$

的吸引子。

设 A 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的非空道路连通紧子集，下面构造满足条件：$f([0,1])=A$ 的连续函数 $f:[0,1]\to \boldsymbol{R}^2$。

令 (Y,ρ_Y) 是一个度量空间 (R^2,ρ_E)，由一个 y—轴和一个 z—轴定义的笛卡尔坐标系来表示 Y 中的点，即 (y,z) 可以代表 Y 中的一个点。

用 E 表示四个顶点分别为 $(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 的正方形，则 $E\subset Y$，令 $(F_0,H_0)=(0,0)$，$(F_1,H_1)=(0,0.5)$，$(F_2,H_2)=(0.5,0.5)$，$(F_3,H_3)=(1,0.5)$，$(F_4,H_4)=(1,0)$

考虑相应于图 3.3.1，相似比为 0.5，且满足下面条件的相似映射

$$w_n(F_0,H_0)=(F_{n-1},H_{n-1})$$
$$w_n(F_4,H_4)=(F_n,H_n)\quad n=1,2,3,4$$

的 IFS。

此 IFS 的 IFS 数码由表 3.3.1 给出。

表 3.3.1　产生一个充满空间的曲线的 E 的 IFS 数码

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0.5	0.5	0	0	0	0.25
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.25
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	0.25
4	0	-0.5	-0.5	0	1	0.5	0.25

设 $A_0\in\mathscr{H}(E)$ 是连接点 (F_0,H_0) 及点 (F_4,H_4) 的简单曲线，它使得 $A_0\cap\partial E=\{(F_0,H_0),(F_4,H_4)\}$，最后这个条件说明曲线除了二个端点外位于单位正方形的内部，考虑集序列 $\{A_n=W^n(A_0)\}_{n=0}^{\infty}$ 其中

$W:\mathscr{H}(E)\to\mathscr{H}(E)$　由以下方式定义

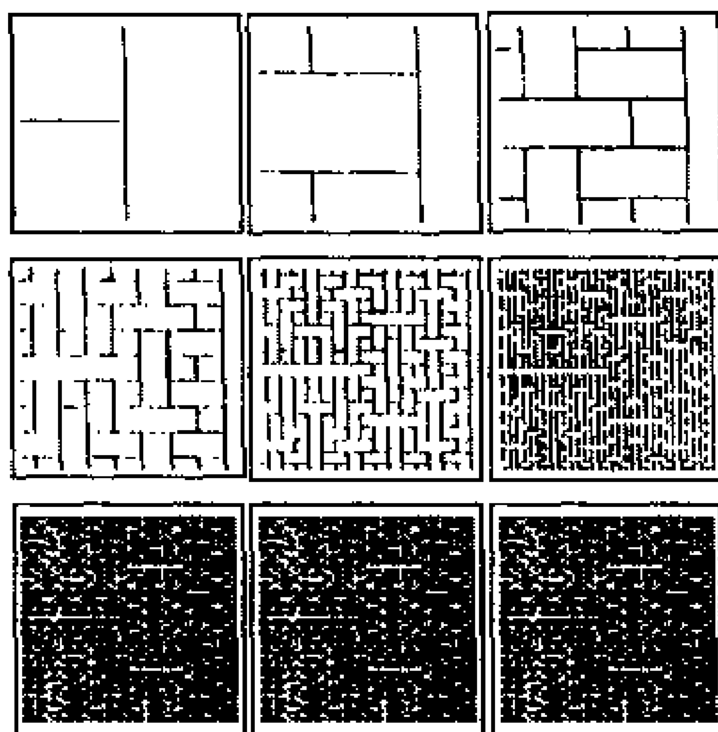


图 3.3.1 一个"收敛"到一个空间充满的曲线的曲线序列，它是从一个 E 中连接 $(0,0)$ 及 $(1,0)$ 的曲线 A_0 开始，对表 3.3.1 中的 IFS 数码应用确定性算法得到的

$$W(B)=\bigcup_{n=1}^{4} W_n(B) \quad B\in\mathscr{H}(E)$$

从而，由定理 3.3.2 知：在豪斯道夫度量下，此序列收敛到 E，可以证明：对每一个 $n=1,2,\cdots$，A_n 是连通点 (F_0,H_0) 及点 (F_4,H_4) 的简单曲线，这样的曲线序列如图 3.3.2 说明。

应用定义的 IFS 构造使得 $f([0,1])=E$ 的连续函数 $f:[0,1]\to E$，应用上节说明的思想通过一种特殊的方法构造隐变量分形插值函数来做到这一点。

考虑 IFS$\{\boldsymbol{R}^3; w_n, n=1,2,3,4\}$，其中映射 $w_n:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ 是仿射变换

$$w_n\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25&0&0\\0&a_n&b_n\\0&c_n&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{n-1}{4}\\e_n\\f_n\end{bmatrix} \quad n=\{1,2,3,4\}$$

表 3.3.1 中定义的常数 $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ 与数据集 $\{(0, F_0, H_0), (0.25, F_1, H_1), (0.5, F_2, H_2), (0.75, F_3, H_3), (1, F_4, H_4)\}$ 相对应，满足定理 3.3.2，从而，此 IFS 的吸引子是连续函数 $f:[0,1] \to \boldsymbol{R}^2$ 的图 G，这个函数的值域是：

$$G_{yz} = \{(y, z) \in \boldsymbol{R}^2 : (x, y, z) \in G\}$$

即在 (y, z) 平面内 G 的投影，可以直接证明 G_{yz} 是由表 3.3.1 中 IFS 数码定义的 IFS 的吸引子 $A = E$。故 $f([0,1]) = E$，我们得到了充满空间的曲线。

三维 IFS 的吸引子是从 $[0,1]$ 到 E 的一个函数的图像。投影 G_{xy} 和 G_{xz} 是隐变量分形函数的图像，$G_{yz} = E$。G 是一个复杂奇异的三维曲线。如图 3.3.2。

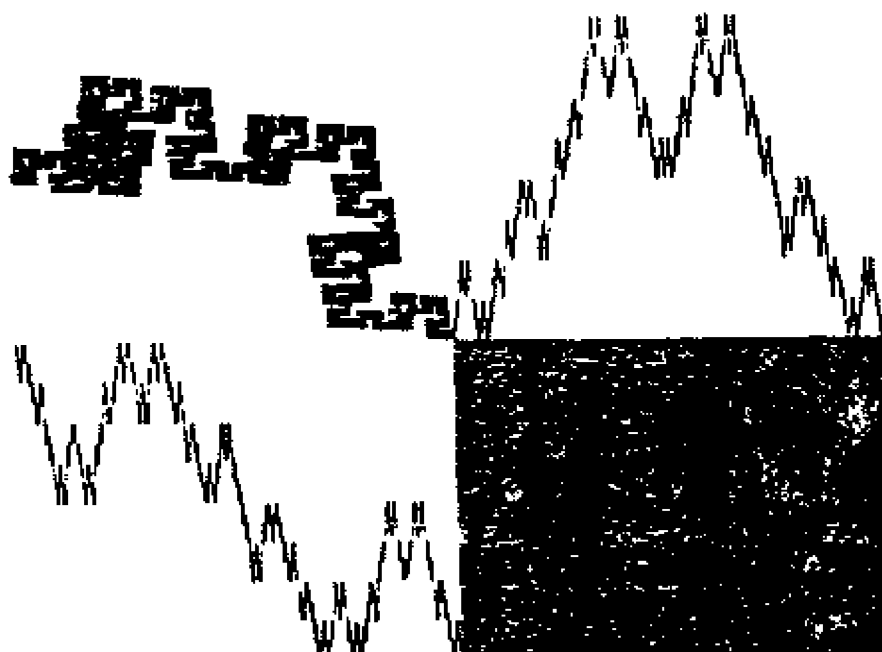


图 3.3.2　从各种不同角度观察到的一个特定的 IFS 的吸引子。从某些点观察，它是一个函数的图像。从某一点观察，显然它是一个充满空间的曲线的图像

4 复迭代中的分形

在复平面 C(或黎曼球 $\hat{C}$)上,读者将看到,复数域上的迭代更奇妙,像 C 上 $f(z)=z^2-\lambda$ 这样的简单函数,对不同的 λ 值($\lambda\in C$),能生成各种形状奇特的分形,这些集合通常称为 Julia 集。而如果根据不同的 λ 值对应的 Julia 集的连通性对参数 λ 进行分类,还可以在参数空间做出称为 Mandelbrot 集的 λ 的点集,这种集往往也是分形,而且 Mandelbrot 集局部与其上点对应的 Julia 集还有某种"相似性"。

对复迭代产生的 Julia 集、Mandelbrot 集的研究大大丰富了分形理论,也显示了分形几何在处理复杂图形上的突出作用,并且为计算机图像模拟开辟了一个广阔天地。

4.1 二次函数的 Julia 集

为了叙述的简洁,取 $f:C\to C$ 为复系数 $n\geqslant 2$ 阶的多项式,$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$。与第二章讨论类似,记 f^k 为函数的 k 重复合,$f^k=f\circ\cdots\circ f$,$f^k(w)$为 w 的第 k 次迭代 $f(f(\cdots f(w)))$。如果 $f(w)=w$,w 就称为 f 的不动点,如果存在大于 1 的整数 p,使 $f^p(w)=w$,则称 w 是 f 的周期点,使 $f^p(w)=w$ 的最小正数 p 称为 w 点的周期。而称 $\{w,f(w),\cdots,f^p(w)\}$ 为周期 p 的轨道。设 w 是周期为 p 的周期点,且 $(f^p)'(w)=q$,其中一撇表示复变微商,点 w 称为

超吸引的,如果 $q=0$

吸引的,如果 $0\leqslant|q|<1$

中性的,如果 $|q|=1$

斥性的,如果 $|q|>1$

所谓 f 对应的 Julia 集可以定义为 f 的斥性周期点的闭包(见定

理 4.1.3)。

设 $f:C\to C$ 为二次多项式，显然 f 是解析的，先考虑对任意 $z\in C$，轨道$\{f^n(z)\}$的变化情况。

首先要说明的是二次函数轨道的变化性质，只需考虑具有形式 $f_\lambda(z)=z^2-\lambda$ 函数的轨道性质，如果令

$$h(z)=\alpha z+\beta,\ (\alpha\neq 0)\text{则}$$

$$h^{-1}(f_\lambda(h(z)))=\frac{\alpha^2z^2+2\alpha\beta z+\beta^2-\lambda-\beta)}{\alpha}$$

适当地先取 α,β,λ 的值，就可以得到需要的任何二次函数 f。此时因为

$$f=h^{-1}\cdot f_\lambda\cdot h$$

所以动力系统$\{\hat{C},f_\lambda\}$与$\{\hat{C},f\}$是等价的，由此，对 f_λ 轨道性质的研究，就能有效地了解相应的二次多项式 f 的轨道性质。

当 $\lambda=0$，$f_0(z)=z^2$ 是最简单的情形，此时，因为 $f_0^k(z)=z^{2k}$，如果记 $z=re^{i\theta}$，则$|f_0^k(z)|=r^{2k}$，所以，当$|z|>1$ 时，$|f_0^k(z)|\to\infty$ $(k\to\infty)$。当$|z|<1$ 时，$|f_0^k(z)|\to 0(k\to\infty)$。即在单位圆盘 $F_0=\{z\in C:|z|\leqslant 1\}$以外点的轨道收敛到无穷点；圆盘内部点的轨道收敛到原点；而只有在单位圆$|z|=1$ 上的点的轨道仍停留在$|z|=1$ 圆周上。

如果在黎曼球 $\hat{C}$ 上考虑问题，可把 F_0 看成以原点为圆心，以 1 为半径(球面距离意义下)的圆。F_0 称为相应于多项式变换 $f(z)=z^2$ 的充满的 Julia 集，而 F_0 的边界称为 f 的 Julia 集，记为 J_0。Julia 集 J_0 把轨道趋于无穷的点和轨道趋于原点的点分开，面 J_0 上的点既不趋于无穷也不趋于原点。事实上 J_0 是 $\hat{C}$ 的紧子集，即 $J_0\in\mathscr{F}(\hat{C})$，且 $f(J_0)=J_0=f^{-1}(J_0)$，它是变换 $f:\mathscr{F}(\hat{C})\to\mathscr{F}(\hat{C})$的“不稳定”的不动点。

对 $\lambda\neq 0$，且 λ 是较小的正数，观察函数 $f_\lambda(z)=z^2-\lambda$，容易看出，当 z 较小时，$f_\lambda^k(z)\to z_0(k\to\infty)$，这里 z_0 是 f_λ 接近原点 O 的不

动点;而如果 z 较大,则 $f_\lambda^k(z)\to\infty(k\to\infty)$,此时 Julia 集仍然是两类点的分界,但却表现出分形的性质。

定义 4.1.1 设 $f:\hat{C}\to\hat{C}$ 是阶数大于 1 的多项式,F_f 表 C 中那些轨道不趋于无穷点的点的集合,即

$$F_f=\{z\in C:\{|f^n(z)|\}_{n=1}^{\infty}\text{是有界的}\} \tag{4.1.1}$$

称此集为相应于 f 的充满的 Julia 集,F_f 的边界称为多项式 f 的 Julia 集,记为 J_f,即

$$J_f=\partial F_f$$

定理 4.1.1 设 $f:\hat{C}\to\hat{C}$ 是队数大于 1 的多项式,F_f 是 f 的充满的 Julia 集,J_f 是 f 的 Julia 集,则 F_f 和 J_f 是 C 的非空紧子集,即 $F_f,J_f\in\mathscr{H}(C)$;同时 $f(J_f)=J_f=f^{-1}(J_f)$ 及 $f(F_f)=F_f=f^{-1}(F_f)$,且 $\mathscr{V}_\infty=\hat{C}-F_f$ 是路径连通的。

证明 只对二次多项式 $f_\lambda=z^2-\lambda$ 证明,一般的情形可参见文献[5]。

设 J_λ,F_λ 分别是 f_λ 的 Julia 集和充满的 Julia 集,ρ_E 仍表示 C 上的欧氏距离。

取 $R>0.5+\sqrt{0.25+|\lambda|}$,对任意满足 $\rho_E(0,z)=|z|>R$ 的 z,可设 $|z|=R+\varepsilon$,其中 $\varepsilon>0$,则

$$\rho_E(0,f_\lambda(z))=|z^2-\lambda|=|z|\left(|z|-\frac{|\lambda|}{|z|}\right)$$

又,
$$\begin{aligned}|z|-\frac{|\lambda|}{|z|}&>\varepsilon+R-\frac{|\lambda|}{R}\\&=\varepsilon+0.5+\sqrt{0.25+|\lambda|}-\sqrt{0.25+|\lambda|}+0.5\\&=1+\varepsilon\end{aligned}$$

即得
$$\rho_E(0,f_\lambda(z))>(1+\varepsilon)|z|,\text{因而}$$
$$\rho_E(0,f_\lambda^n(z))>(1+\varepsilon)^n|z| \tag{4.1.2}$$

令 $\mathscr{V}=\{z\in C:|z|>R\}\cup\{\infty\}$,由式(4.1.2)知,任意 $z\in\mathscr{V}$,轨道 $\{f_\lambda^n(z)\}$ 收敛到 ∞,因此,如果轨道 $\{f_\lambda^n(z)\}$ 是有界的,它必不能与 $\mathscr{V}$ 相交。用 F_λ 表示轨道与 $\mathscr{V}$ 不相交的点的集合,即

$$F_\lambda=\{z\in\hat{C}:f_\lambda^n(z)\notin\mathscr{V},\ \forall\ n\}$$

考虑集序列，$\mathscr{V}_n=f_\lambda^{-n}(v),\ n=0,1,2,\cdots$

由于 $\mathscr{V}$是开集，f_λ 是解析的(因而连续)，所以 $\mathscr{V}_n(n=0,1,2,\cdots)$也是开的，并且由二次函数的性质知 $\mathscr{V}_n$ 也是连通的。

因为 $f_\lambda(\mathscr{V})\subset\mathscr{V}$，所以 $\mathscr{V}\subset f_n^{-1}(\mathscr{V})$，则

$$\mathscr{V}=\mathscr{V}_0\subset\mathscr{V}_1\subset\cdots\subset\mathscr{V}_n\subset\cdots$$

对每个非负整数 n，

$$\mathscr{V}_n=\{z\in\hat{C}:\{z,f_\lambda^1(z),\cdots,f_\lambda^n(z)\}\cap\mathscr{V}\neq\emptyset\}$$

即 $\mathscr{V}_n$ 是由那些最多经 n 次迭代就进入 $\mathscr{V}$的点组成的集合，令

$$K_n=\hat{C}\setminus\mathscr{V}_n\quad n=0,1,2,\cdots$$

则 K_n 是前几次迭代中轨道与 $\mathscr{V}$不交的点的集合即

$$K_n=\{z\in\hat{C}:\{z,f_\lambda^1(z),\cdots,f_\lambda^n(z)\}\cap\mathscr{V}=\emptyset\}。$$

可以解方程 $z^2-\lambda=z$，得出 f_k 的不动点 z_λ，于是

$$f_\lambda(z_\lambda)=z_\lambda^2-\lambda=z_\lambda$$

z_λ 的轨道收敛到 z_λ，因而对任意 n，$z_\lambda\notin\mathscr{V}_n$ 即 $z_\lambda\in K_n(n=0,1,2,\cdots)$，所以对任意 n，K_n 是非空闭集，因而是紧的。由

$$\mathscr{V}=\mathscr{V}_0\subset\mathscr{V}_1\subset\cdots\subset\mathscr{V}_n\subset\cdots$$

知
$$K_0\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots$$

所以$\{K_n\}$是 $\mathscr{F}(\hat{C})$中的哥西列，由 $\mathscr{F}(\hat{C})$的完备性，$\{K_n\}$收敛到 $\mathscr{F}(\hat{C})$中的点，这个极限点就是轨道不与 $\mathscr{V}$相交的点的集合，即

$$F_\lambda=\lim_{n\to\infty}K_n=\bigcap_{K=0}^{\infty}K_n\tag{4.1.3}$$

所以 $F_\lambda\in\mathscr{F}(\hat{C})$，且

$$\begin{aligned}K_{n+1}&=\hat{C}-\mathscr{V}_{n+1}=f_\lambda^{-1}(\hat{C})-f_\lambda^{-1}(\mathscr{V}_n)=f_\lambda^{-1}(\hat{C}-\mathscr{V}_n)\\&=f_\lambda^{-1}(K_n)\end{aligned}$$

由定理 2.3.2 的证明蕴含 $F_\lambda=f_\lambda^{-1}(F_\lambda)$，再由 f_λ 是满射，即得 $f_\lambda(F_\lambda)=F_\lambda$。

由于 f_λ 是连续的，所以如果 $z\in F_\lambda$ 的内部，则也有 $f_\lambda^{-1}(z)\subset$

F_λ 的内部，因此

$$F_\lambda \supset f_\lambda^{-1}(\partial F_\lambda) \supset \partial F_\lambda$$

如果 $z \in f_\lambda^{-1}(\partial F_\lambda)$，$\theta$ 是任意包含 z 的开球，则 $f_\lambda(\theta)$ 是开集且包含 $f_\lambda(z) \in \partial F_\lambda$，因此 $f_\lambda(\theta)$ 包含有轨道收敛到无穷的点，即知 $f_\lambda^{-1}(\partial F_\lambda) = \partial F_\lambda$，所以 $f^{-1}(\partial F_\lambda) = \partial F_\lambda$，特别有 $f(\partial F_\lambda) = \partial F_\lambda$。

由式(4.1.3)可知，充满的 Julia 集是一非开紧集序列的极限，它的补集记为 $\mathscr{V}_\infty$，是$(\hat{C}, \rho_s)$中一开的且路连通的集的极限，即

$$\mathscr{V}_\infty = \lim_{n \to \infty} \mathscr{V}_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{V}_n$$

$\mathscr{V}_\infty$称为在多项式变换 f_λ 之下，无穷点的吸引域，由于每个 $\mathscr{V}_n$ 都是路连通的，因此 $\mathscr{V}_\infty$也是路连通的，则有

$$\hat{C} = F_\lambda \cup \mathscr{V}_\infty \tag{4.1.4}$$

其中 $\mathscr{V}_\infty$是开的、连通而且是非空的，F_λ 是紧的非空的，定理 1 证毕。

图 4.1.1 是定理证明的一个图解，同时这个证明也提供了关于这个定理与 5.2 节讲到的逃逸时间算法之间的关系。

图 4.1.2 是 $\lambda = 1.1$ 时 f_λ 对应的 Julia 集，图中围道把区域 $\mathscr{V}_{n+1} \setminus \mathscr{V}_n$ 分开$(n = 0, 1, 2, \cdots)$，这些围道同时表示在定理 1 证明中的 K_n 的边界，黑色部分表示充满的 Julia 集，在 $\mathscr{V}_{n+1} \setminus \mathscr{V}_n$ 中的点恰好经过 $n+1$ 次迭代到达 $\mathscr{V}$。

从上面的定义可知，Julia 集 J_λ 是动力系统$\{\hat{C}, f_\lambda = z^2 - \lambda\}$的"斥子"。考虑 $f_\lambda(z)$的逆，它是一对函数 $f^{-1}(z) = \{\sqrt{z+\lambda}, -\sqrt{z+\lambda}\}$，应当注意，$\{\hat{C}, w_1(z) = \sqrt{z+\lambda}, w_2(z) = -\sqrt{z+\lambda}\}$不是以 J_λ 为它的吸引子的双曲 IFS，因为 $\hat{C} = w_1(\hat{C}) \cup w_2(\hat{C})$，所以这个 IFS 在空间 $\mathscr{H}(\hat{C})$上的不动点不惟一，为使 IFS 有惟一的吸引子，要在 $\hat{C}$ 上去掉一些部分，以便得到一个 IFS 作用于其上的较小空间。利用定理 2.3.2，容易证明下面的定理，它指出如何找出吸引子是 Julia 集的 IFS。

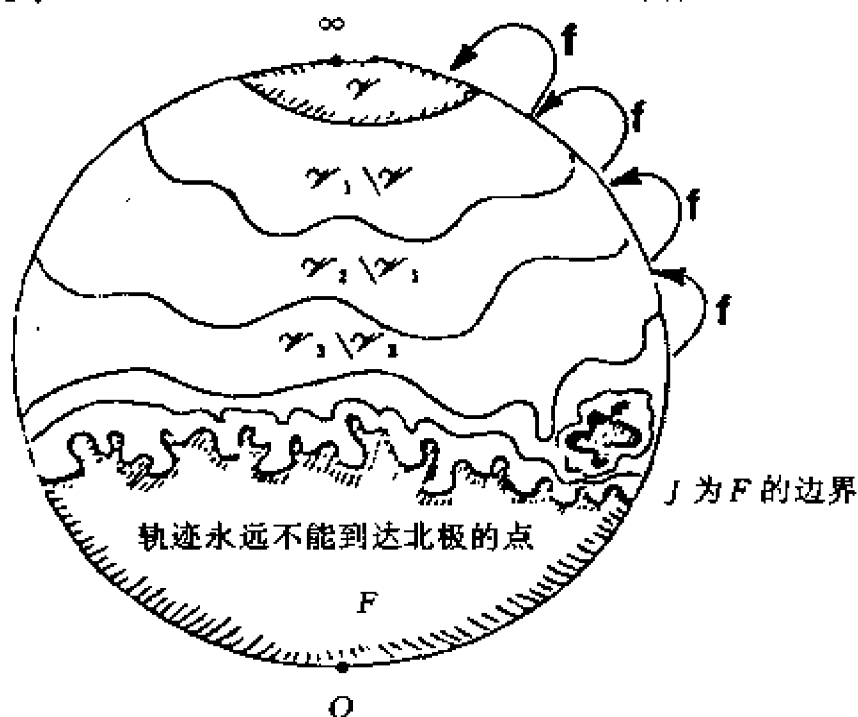


图 4.1.1　定理 4.1.1 证明的图解说明，图中的不降集序列$\{\mathscr{V}_n\}$收敛到无穷点的吸引域$\mathscr{V}_\infty$，不增集序列$\{K_n\}$收敛到充满的 Julia 集 F_λ，一般的，原点 O 不必一定属于 F_λ

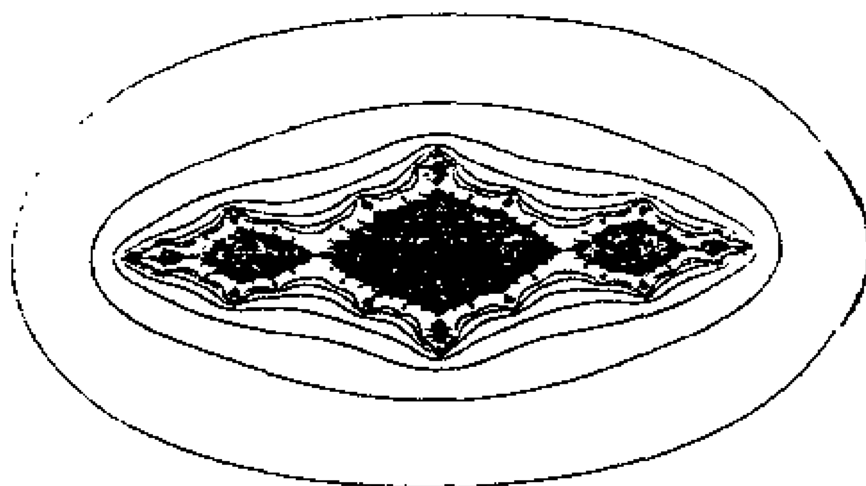


图 4.1.2　$\lambda=1.1$ 时 f_λ 对应的 Julia 集，黑色部分表示充满的 Julia 集，边界是 Julia 集，围道把区域$\mathscr{V}_{n+1}\setminus\mathscr{V}_n$分开$(n=0,1,2,\cdots)$，在$\mathscr{V}_{n+1}\setminus\mathscr{V}_n$中的点恰好经过$(n+1)$次迭代到达$\mathscr{V}$

定理 4.1.2　$\lambda\in C$，设动力系统$\{C, f_\lambda=z^2-\lambda\}$具有吸引循环

$\{z_1, z_2, \cdots, z_p\}$，$\epsilon$ 是充分小的正数，用 X 表示去掉$(p+1)$个半径为 ϵ 的开圆的黎曼球$\hat{C}$(半径用球面距离度量)，其中 p 个圆分别以循环的每个点为圆心，有一个以无穷点为圆心。由$\{X, w_1(z)=\sqrt{z+\lambda}, w_2(z)=-\sqrt{z+\lambda}\}$定义一个 IFS，则由 $W(B)=w_1(B)\cup w_2(B)\ \forall B\in\mathscr{H}(X)$，定义的$\mathscr{H}(X)$上的变换 W，把$\mathscr{H}(X)$映射到自身，且在$\mathscr{H}(X)$上关于豪斯道夫距离是连续的。而且，$W:\mathscr{H}(X)\to\mathscr{H}(X)$具有惟一的不变集，即相应于函数 $f_\lambda=z^2-\lambda$ 的 Julia 集 J_λ，同时，

$$\lim_{n\to\infty} W^n(B)=J_\lambda \quad \forall B\in\mathscr{H}(X)$$

如果原点的轨道$\{f^n(0)\}$收敛到无穷点，且 $X=\hat{C}\setminus B(\infty,\epsilon)$，则定理的结论仍然成立。

利用著名的 Montel 定理(参见文献[5])为出发点，可以得出 Julia 集的一系列性质，但证明需要较深的复变函数的知识，故此只把这些性质总结成下面的定理。

定理 4.1.3 Julia 集 J_λ 为多项式f_λ 的斥性周期点的闭包，它是不含孤立点的不可数紧子集，如果 $z\in J_\lambda$，则 J_λ 是$\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-k}(z)$的闭包。Julia 集是 f_λ 的包含无穷点在内的每一吸引不动点的吸引域的边界，而且 f_λ 在J_λ 上的作用是混沌的。

4.2 参数 λ 与 Julia 集

对不同的 λ 值，二次函数 $f_\lambda(z)=z^2-\lambda$ 对应着不同的 Julia 集。这些不同的集在形状、连通性等有很大的区别。

当 λ 是实数时，情况比较简单，对 $\lambda=0$，已知充满的 Julia 集是一个圆。随着 λ 值的增加F_λ 变得越来越紧缩在一起，当 $\lambda=2$ 时，F_2 成为闭区间$[-2,2]$。对某些 $\lambda\in[0,2]$，F_λ 有比较宽的内部，而对另一些 $\lambda\in[0,2]$，F_λ 却没有内部而成为树状的，但对所有 $\lambda\in[0,2]$，F_λ 都是连通的。

面 λ 是复数时，情况就比较复杂，但至少知道，当$|\lambda|>2$ 时，F_λ 是全不连通的，并且形状是"类康托集"或者"似空"的。对应于不同

λ 值的 Julia 集可参看图 4.1.2,图 4.2.1 和图 4.2.2。

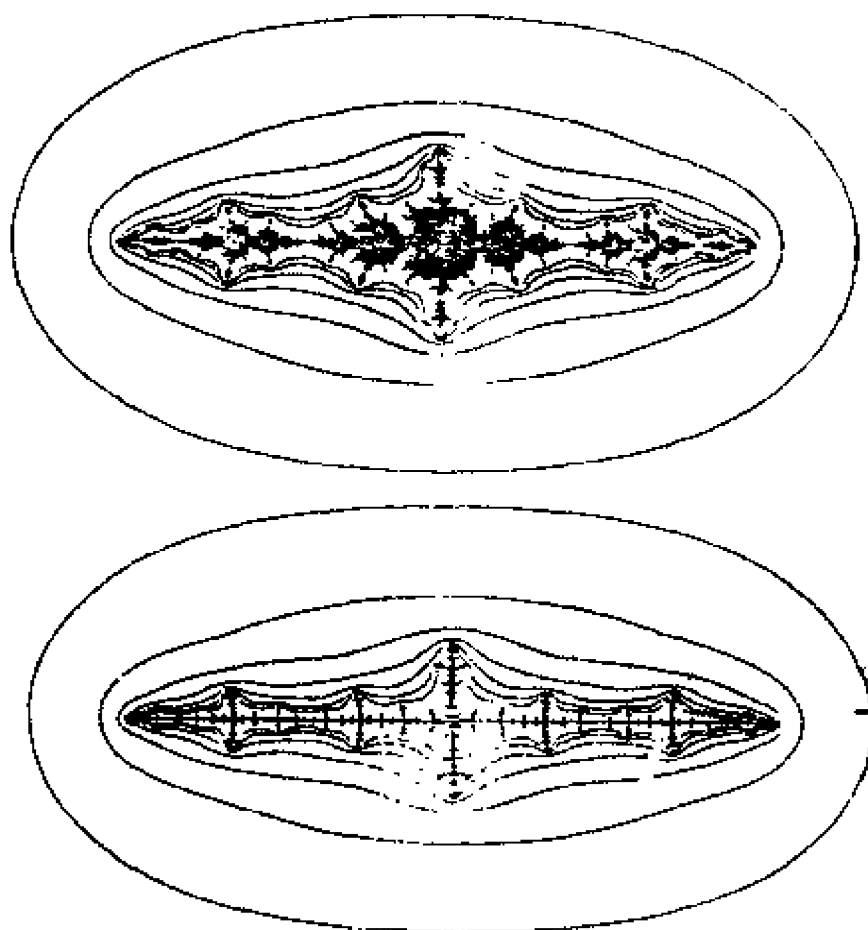


图 4.2.1　相应于两个 $\lambda\in[0,2]$的充满 Julia 集,外部的闭合曲线是轨线。(轨线的意义见图 4.1.2 的说明)

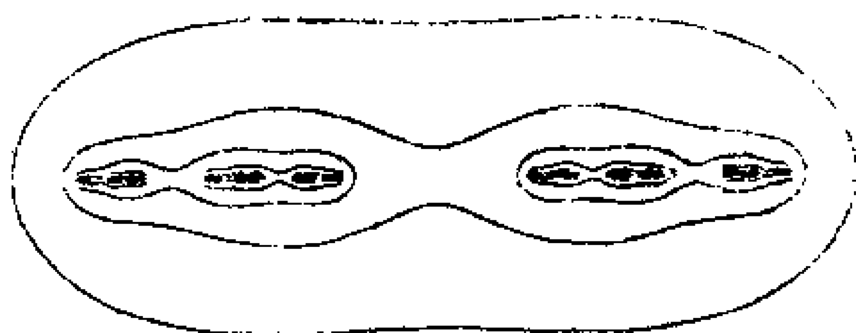


图 4.2.2　满足$|\lambda|>2$ 的一个 λ 值对应的 Julia 集,轨线的意义见图 4.1.2 的说明

下面我们较细致地研究$|\lambda|$较小的情形,如果$|\lambda|$较小,z 也充

分小，当 $k\to\infty$ 时，$f_\lambda^k(z)\to z_0$，这里 z_0 是 f_λ 接近于 0 的吸引不动点 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\lambda})$。另外，如果 z 较大，则 $f_\lambda^k(z)\to\infty$。因此可以推断 $|\lambda|$ 较小时，Julia 集从 $\lambda=0$ 时的圆变形为简单闭曲线（即没有自交点的曲线），这个闭曲线把两类 z 的点分开了。

为了证明方便，下面的定理中只讨论 $|\lambda|<\frac{1}{4}$ 的情形：

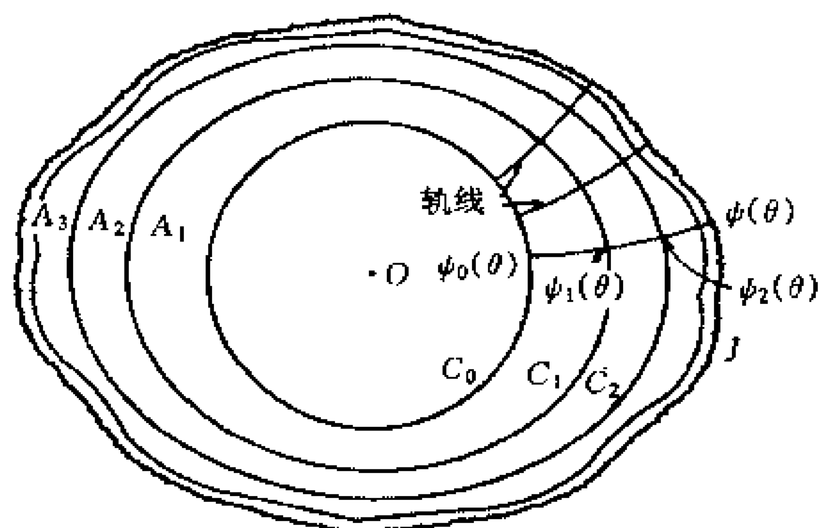
定理 4.2.1 若 $|\lambda|<\frac{1}{4}$，则 $f_\lambda(z)=z^2-\lambda$ 对应的 Julia 集是简单闭曲线。

证明 设 C_0 为曲线 $|z|=\frac{1}{2}$，显然它包围了 λ 和 f_λ 的吸引不动点，因为 $f(C_0)\subset C_0$，直接计算可知，$f^{-1}(C_0)$ 是环绕 C_0 的回路。把从 C_0 上的点为起点垂直到达 C_1 的曲线称为“轨线”，可以用这样的轨线构成的连续充满 C_0 与 C_1 之间的环形区 A_1，任一 $\theta\in[0,2\pi]$，轨线从 C_0 上的点 $\psi_0(\theta)=\frac{1}{2}e^{i\theta}$ 出发，到 C_1 的端点记为 $\psi_1(\theta)$。逆像 $f_\lambda^{-1}(A_1)$ 是外边界为 C_2，内边界为 C_1 的环形区域 A_2，其中 $C_2=f_\lambda^{-1}(C_1)$。f_λ 以二对一的方式把 A_2 映射成 A_1，连结 C_0 和 C_1 的轨线的逆像给出了一族连结 C_1 与 C_2 的轨线。设 $\psi_2(\theta)$ 是从 C_1 上的 $\psi_1(\theta)$ 点出发的轨线在 C_2 的端点。依此类推，得到一序列后一个环绕前一个的回路 C_k，及连接 C_k 上点 $\psi_k(\theta)$ 与 C_{k+1} 上点 $\psi_{k+1}(\theta)$ 的轨线族。

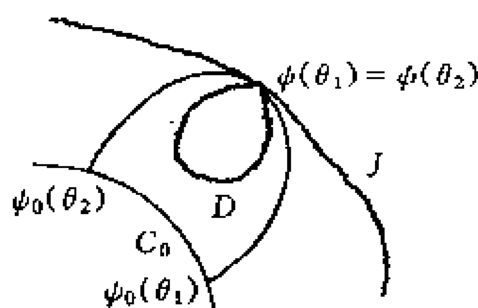
当 $k\to\infty$，曲线 C_k 逼近吸引点 z_0 吸引域的边界，由定理 4.1.3，这个边界正好是 Julia 集 J_λ。由于对 C_1 外的 z，存在 $r>1$，使 $|f'_\lambda(z)|>r$，所以 f_λ^{-1} 是 J_λ 附近的压缩映射。由此连结 $\psi_k(\theta)$ 与 $\psi_{k+1}(\theta)$ 的轨线长度当 $k\to\infty$ 时，以几何速率收敛于 0。因此 $k\to\infty$ 时，$\psi_k(\theta)$ 一致收敛于连续函数 $\psi(\theta)$，并且 J_λ 是由 $\psi(\theta)(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 决定的闭曲线。

下面说的 ψ 是简单曲线，假如 $\psi(\theta_1)=\psi(\theta_2)$，$D$ 是 C_0 及分别

由 $\psi_0(\theta_1)$及 $\psi_0(\theta_2)$到这个公共点的两条轨线所围的区域。D 的边界在f_λ 的迭代之下仍然为有界的，由最大模定理(一个解析函数的模在一个区域的边界点上取最大值。)，D 在f 的迭代下仍然为有界，利用 Montel 定量容易推出 D 的内部不能包含J_λ 的任何点，于是图 4.2.3(b)的情形不能发生，所以对在 θ_1 与 θ_2 之间的所有 θ 都有 $\psi(\theta)=\psi(\theta_1)=\psi(\theta_2)$，由此知 $\psi(\theta)$没有自交点。



(a)



(b)

图 4.2.3　定理 4.2.1 的证明

当$|\lambda|$值较大时，对$|\lambda|>2$，J_λ 是全不连通的。

定理 4.2.2　设$|\lambda|>\dfrac{1}{4}(5+2\sqrt{6})$，则 J_λ 是全不连通的，而且对 J 附近的 z，J_λ 是由 $f_\lambda^{-1}(z)$的两个分枝定义的两个压缩变换的不变集。且当$|\lambda|$充分大时，有：

$$\dim_B J_\lambda = \dim_H J_\lambda \sim 2\log 2/\log|\lambda| \tag{4.2.1}$$

证明 设 C 为圆 $|z|=|\lambda|$，而 D 为它的内部 $|z|<|\lambda|$，则

$$f_\lambda^{-1}(C) = \{(\lambda e^{i\theta}-\lambda)^{1/2}: 0\leqslant\theta\leqslant 4\pi\} \tag{4.2.2}$$

它是自交点为 0 的 8 字形图。因为 $|\lambda|>2$，有 $f_\lambda^{-1}(C)\subset D f_\lambda^{-1}(C)$ 的每个回路的内部由 f_λ 以双射的方式映到 D 上。如果定义 $S_1, S_2: D\to D$ 为 $f_\lambda^{-1}(z)$ 在每一回路内的分枝，则 $S_1(D)$ 和 $S_2(D)$ 是两个回路的内部(见图 4.2.4)。

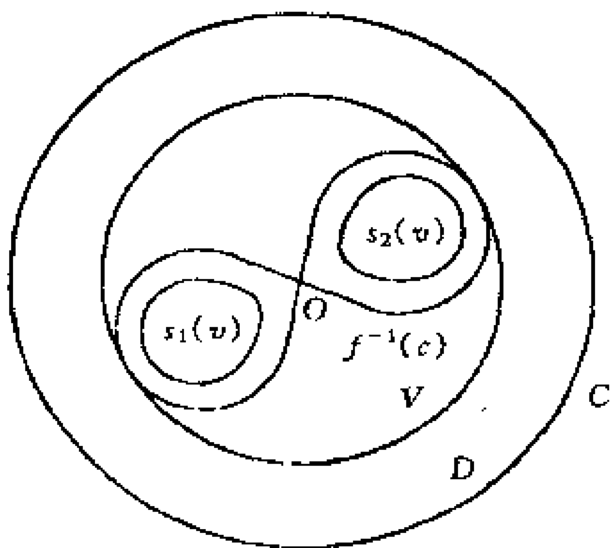


图 4.2.4 定理 4.2.2 的证明

设 V 为圆盘 $\{z: |z|<|2\lambda|^{1/2}\}$，选择 V 的半径，使 V 正好包含 $f_\lambda^{-1}(C)$，所以 $S_1(D)$，$S_2(D)\subset V\subset D$。因此 $S_1(V)$，$S_2(V)\subset V$，且 $S_1(\overline{V})$ 与 $S_2(\overline{V})$ 相互不交。

则有 $$S'_1(z)=S'_2(z)=(f_\lambda^{-1})'(z)=\frac{1}{2}(z-\lambda)^{-1/2}$$

因此，如果 $z\in\overline{V}$，则

$$\frac{1}{2}(|\lambda|+|2\lambda|^{1/2})^{-1/2}\leqslant|S'_i(z)|\leqslant\frac{1}{2}(|\lambda|-|2\lambda|^{-1/2})^{-1/2} \tag{4.2.3}$$

若 $|\lambda|>\frac{1}{4}(5+2\sqrt{6})$，式(4.2.3)上界小于 1，此时 S_1 及 S_2 在圆盘 $\overline{V}$ 上是压缩的，由定理 2.1.1，存在惟一非空紧不变集 A，使

$$S_1(A)\cup S_2(A)=A \tag{4.2.4}$$

因 $S_1(\overline{V})$ 与 $S_2(\overline{V})$ 不交，所以 $S_1(A)$ 与 $S_2(A)$ 也不交，即知 A 是全不连通的。

下面说明 A 就是 Julia 集 J_λ，因为 $\overline{V}$ 至少包含 J_λ 的一点 z，因为 $f_\lambda^{-k}(\overline{V})\subset\overline{V}$，则有

$$J_\lambda=(\bigcup_{k=1}^{\infty}f_\lambda^{-1}(z))\text{的闭包}\subset\overline{V}$$

由定理 4.1.3 知 J_λ 为 $\overline{V}$ 的满足 $J=f_\lambda^{-1}(J)$ 的非空紧子集，或等价地 $J_\lambda=S_1(J_\lambda)\cup S_2(J_\lambda)$。于是 $J_\lambda=A$ 是满足式 4.2.4 的惟一紧不变集。

最后利用式 4.2.3 及微分中值定理，可以证明对 $\overline{V}$ 的不同点 z_1 及 z_2 有

$$\frac{1}{2}(|\lambda|+|2\lambda|^{1/2})^{-1/2}\leqslant\frac{|S_i(z_1)-S_i(z_2)|}{|z_1-z_2|}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(|\lambda|-|2\lambda|^{1/2})^{-1/2}$$

由定理 2.2.3，$\dim_H J_\lambda$ 的下界及上界分别可由方程 $2\left(\frac{1}{2}(|\lambda|\pm|2\lambda|^{1/2})^{-1/2}\right)^s=1$ 的解给出，得

$$s=\frac{2\log 2}{\log 4(|\lambda|\pm|2\lambda|^{1/2})}$$

给出了定理中的渐近估计。

4.3 参数空间与 Mandelbrot 集

在上节中研究的二次函数 $f_\lambda(z)=z^2-\lambda$，对应每个 $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2\in C$，$\{\hat{C},f_\lambda(z)\}$ 是依赖于两个参数 (λ_1,λ_2) 的动力系统。参数 (λ_1,λ_2) 全部可能值称为参数空间，在这一章中我们用 P 表示参数空间，典型的参数空间是 $\{\boldsymbol{R}^2,\rho_E\}$ 的子空间，比如正方形、闭球或 $\boldsymbol{R}^2$。

例 4.3.1 $P=\{(\lambda_1,\lambda_2)\in\boldsymbol{R}^2,|\lambda_1|,|\lambda_2|<1/\sqrt{2}\}$，这是一族双曲 IFS$\{C,(\lambda_1+i\lambda_2)z+1,(\lambda_1+i\lambda_2)z-1\}$ 的参数空间，任意 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in P$，都对应到一个 IFS，而每个 IFS 都具有一个吸引子，记为 $A(\lambda)$，因此 P 中的每一点对应到一个分形 $A(\lambda)$，而整个参数空间 P 对应的是一分形族 $\{A(\lambda)\}$。

设 $P\subset\boldsymbol{R}^2$ 是相应于分形族 $\{A(\lambda)\}$ 的参数空间，即存在函数

$A:P\to\mathscr{H}(X)$，使任意 $\lambda\in P$，对应一个集 $A(\lambda)\in\mathscr{H}(X)$。下面讨论到的是，在参数空间 P 上，可将对应的 $A(\lambda)$集是连通的 λ 的集找出来，有趣的是这样的 λ 点集经常也是分形。

定理 4.3.1 设$\{X, w_1, w_2\}$是双曲 IFS，相应的吸引子是 A，设 w_1 和 w_2 在 A 上是一对一的，如果 $w_1(A)\cap w_2(A)=\varnothing$，则 A 是全不连通的；如果 $w_1(A)\cap w_2(A)\neq\varnothing$，则 A 是连通的。

证明 设 $w_1(A)\cap w_2(A)=\varnothing$，如果 $\sum$ 表示相应于 IFS 的编码空间，则由定理 2.2.2，映射 $\varphi:\sum\to A$ 是可逆的，且 φ 同时也是这两个紧度量空间之间的连续映射。φ 是同胚，因此 A 与编码空间 $\sum$ 同胚，又从 $\sum$ 是全不连通的(字码两个或多于两个的编码空间与典型康托集同胚)，知 A 也是全不连通的。

设 $w_1(A)\cap w_2(A)\neq\varnothing$，则至少有一点 $x\in w_1(A)\cap w_2(A)$，使 x 有两个地址，记

$$x=\varphi(\xi)=\varphi(\sigma),\text{其中 }\xi_1=1,\sigma_1=2 \tag{4.3.1}$$

如果 A 是不连通的，则因为 A 是紧的，可以找到两个非空的紧集 E 和 F，使

$$A=E\cup F,\ E\cap F=\varnothing,$$

利用紧性，存在 $\delta>0$，使任意 $e\in E, f\in F$

$$\rho_E(e,f)\geqslant\delta$$

对某个正整数 k，设 Ψ,Π 是前 k 个数字相同的编码，即

$$\Pi_i=\Psi_i,\ i=1,2,\cdots,k,\text{则}$$

$$\rho(\varphi(\Psi),\varphi(\Pi))\leqslant s^k\operatorname{diam}A \tag{4.3.2}$$

其中 $\operatorname{diam}A$ 表示 A 的直径，$s\in[0,1]$是 IFS 的压缩比，设 $\varphi(\Pi)\in E$，$\varphi(\Psi)\in F$

$$\delta\leqslant\rho(\varphi(\Pi),\varphi(\Psi))$$

则

$$k\leqslant\frac{\log(\delta/\operatorname{diam}A)}{\log s} \tag{4.3.3}$$

即如果 $e\in E, f\in F$,则它们地址上相同的数字不能超过式(4.3.3)右边的数。所以存在一个最大的数 M 使 $e\in E, f\in F$ 在 $i=1,2,\cdots,j(j\leqslant M)$位置上的地址相等,并且这个最大数 M 可能在某对点上,比如说在 e 和 f 上达到,这样可以选 $\rho_i\in\{1,2\}$ $i=1,2,\cdots,M$,使

$$\theta(\rho_1,\cdots,\rho_M,1,\cdots)=e\in E$$

$$\theta(\rho_1,\cdots,\rho_M,2,\cdots)=f\in F$$

现在考虑式 4.3.1 定义的有两个地址的点 x,则知 $z=w_{\rho_1}\circ\cdots\circ w_{\rho_M}(x)$也有两个地址,即

$$z=\theta(\rho_1,\cdots,\rho_M,1,\xi_2,\xi_3,\cdots)=\theta(\rho_1,\cdots,\rho_M,2,\sigma_2,\sigma_3)$$

可见 z 的地址与 $f\in F$ 的地址开始的 $M+1$ 个数字相同,因此 $z\in F$,同样 z 的地址与 $e\in E$ 的地址的开始 $M+1$ 个数字也相同,z 也属于 E。从而表明 A 不是不连通的,即 A 是连通的。

有了定理 1 的结论,可以给出含有两个映射的 IFS 族的 Mandelbrot 集的定义:

定义 4.3.1 设$\{X, w_1, w_2\}$是依赖于参数 $\lambda\in P\subset \boldsymbol{R}^2$ 的双曲 IFS 族,$A(\lambda)$表示相应 IFS 的吸引子,点集 $\mathcal{U}\subset P$ 是由下式定义的集合

$$\mathcal{U}=\{\lambda\in P: A(\lambda)\text{是连通的}\}$$

称为此 IFS 族的 Mandelbrot 集。

例 4.3.2 考虑 IFS 族$\{C: \lambda z-1, \lambda z+1\}$,及参数空间 $P=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in C, \lambda_1^2+\lambda_2^2>1\}$,图 4.3.1 是相应的 Mandelbrot 集 $\mathcal{U}$ 的图像。这是一个 IFS 对应的分形的“地图”,白色地方的每一点代表一个全不连通的分形吸引子,而黑色地方的点对应的分形是连通的。

从图上可看出 $\mathcal{U}$ 的边界相当错综复杂,在图 4.3.2 标出图 4.3.1 上几处边界的特写镜头,图 4.3.2 的半岛螺旋形放大成图 4.3.3。

图 4.2.4 显示的是位于 Mandelbrot 集边界附近的一些 λ 点对应的吸引子 $A(\lambda)$的图像。很容易看出,Mandelbrot 集的边界的局

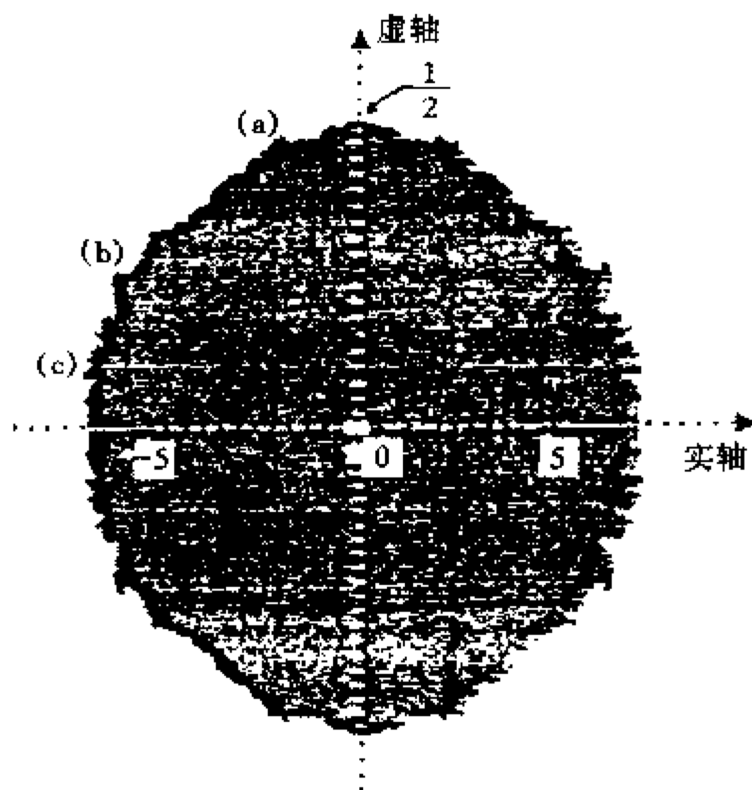


图 4.3.1 IFS 族{C: $\lambda z-1$, $\lambda z+1$}对应的 Mandelbrot 集，其中参数空间为 $P=\{\lambda\in R^2 |\lambda|<1\}$，白色地方点对应的分形是不连通的

部，与这局部上 λ 点相应的分形 $A(\lambda)$ 间具有一定的"族相似性"。为看清这一点，图 4.3.5 表示的是图 4.3.3 半岛螺旋顶部的 λ 值对应的分形吸引子，注意它包含的螺旋与参数空间中半岛螺旋非常相似。

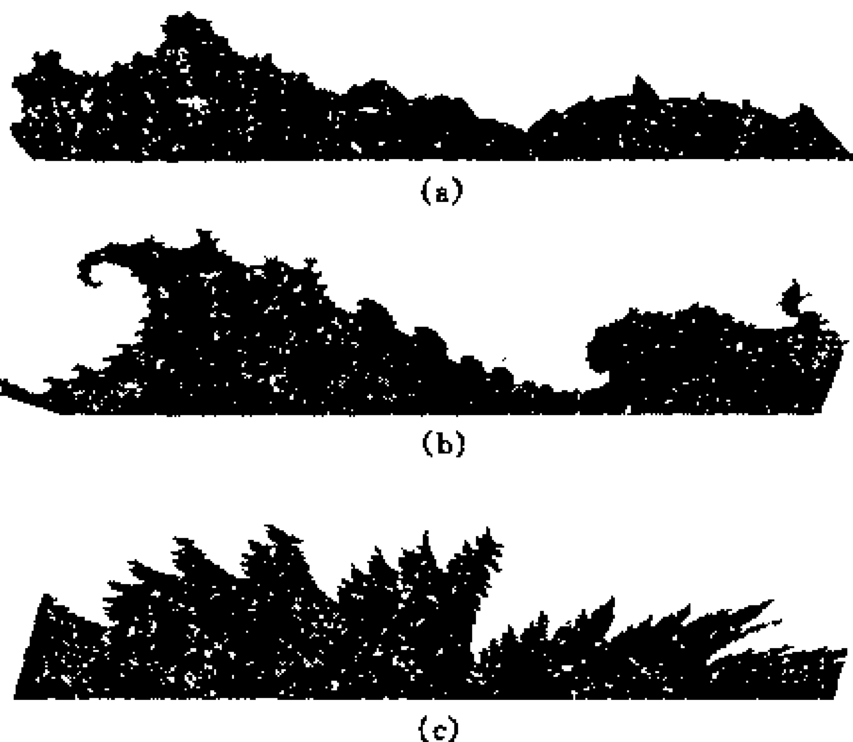
这种"族相似性"的原因在参考文献[2]的 8.4 节最后，做了一些解释，感兴趣的读者可以参考。

下面考虑二次函数的 Mandelbrot 集，对 $\lambda\in P=C$，动力系统 $\{\hat{C}, f_\lambda(z)=z^2-\lambda\}$ 也对应到一族"斥子"$\{A(\lambda)\}$，同样也可以根据对应的 Julia 集 J_λ 的连通性得出参数空间的 Mandelbrot 集。

定义 4.3.2 称相应于一族动力系统$\{\hat{C}: z^2-\lambda\}$的 Mandelbrot 集为

$$\mathcal{U}=\{\lambda\in P: J_\lambda \text{ 是连通的}\}$$

从定义 4.3.1 和定义 4.3.2 表现出，似乎 Mandelbrot 集与 J_λ 的


图 4.3.2　在图 4.3.1 中边界处(a),(b),(c)的特写镜头

一个相当特殊的性质有关,事实上 $\mathscr{U}$ 包含了关于 Julia 集构造的大量信息。

但是定义 1 与定义 2 不适合计算、应用的目的,从下面定理中,我们导出了 Mandelbrot 集的一个方便的等价的定义。

定理 4.3.2　一族动力系统 $\{\hat{C}: f_\lambda(z) = z^2 - \lambda\}, \lambda \in P = C$ 的 Julia 集是连通的,当且仅当原点的轨道 $\{f_\lambda^n(0)\}$ 有界,即

$$\mathscr{U} = \{\lambda \in C: \{f_\lambda^n(0)\} \text{有界}\} \tag{4.3.4}$$

$$= \{\lambda \in C: |f_\lambda^n(0)| \nrightarrow \infty, n \to \infty\} \tag{4.3.5}$$

证明　首先,利用复变函数的基本性质:设 C 为复平面上的回路,则

(a) 如果 λ 位于 C 内,则 $f_\lambda^{-1}(C)$ 是以 C 的内部的逆像为它的内部的回路。

(b) 如果 λ 位于 C 上,则 $f_\lambda^{-1}(C)$ 为一 8 字图,使得 C 的内部的逆像为两个回路的内部。

因为存在数 r,使当 $|z| > r$ 时,$|f_\lambda(z)| > 2|z|$,所以显然 $f_\lambda^n \nrightarrow$

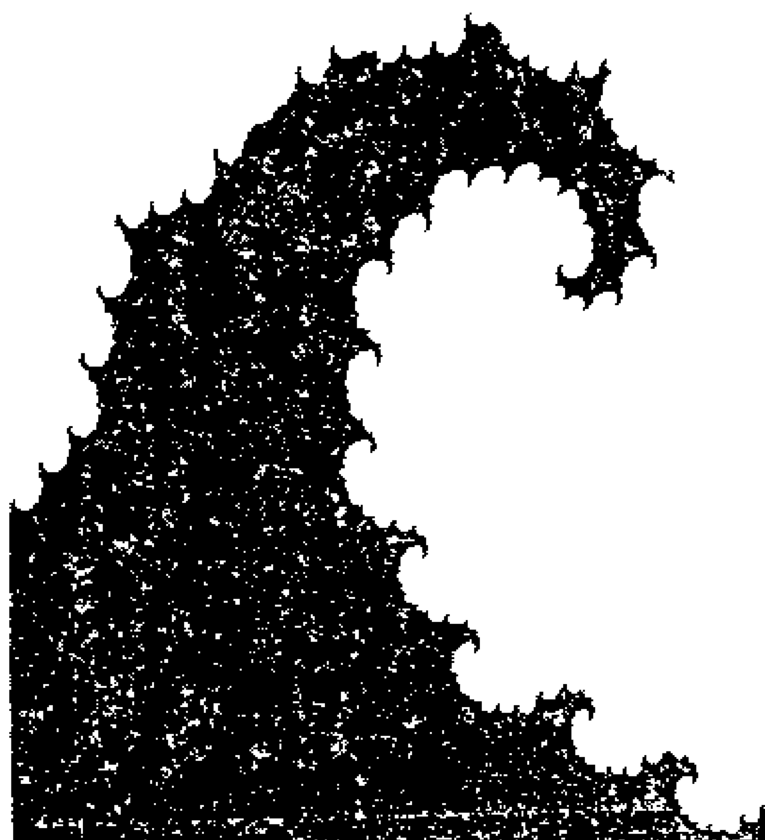


图 4.3.3 在图 4.3.2 中(b)处的袖岛螺旋的放大图

∞当且仅当$\{f_\lambda^n(0)\}$有界,即式(4.3.4)与式(4.3.5)等价。

设$\{f_\lambda^n(0)\}$有界,则存在 C 中充分大的圆 C 使所有点$\{f_\lambda^n(0)\}$位于 C 内,而使 $f_\lambda^{-1}(C)$在 C 的内部,并使 C 外部的点在f_λ 的迭代下趋于∞。因为 $\lambda=f_\lambda(0)$是在 C 的内部,由(a)知 $f_\lambda^{-1}(C)$为含于 C 的内部的一个回路,同时 $f_\lambda(\lambda)=f_\lambda(f_\lambda(0))$在 C 内,且 f_λ^{-1} 将C 的外部映射到$f_\lambda^{-1}(C)$的外部,所以 λ 在$f_\lambda^{-1}(C)$内。于是 $f_\lambda^{-2}(C)$是包含于 $f_\lambda^{-1}(C)$内部的一条回路,继续下去可得$\{f_\lambda^{-n}(C)\}$是一序列回路,每一个回路的内部都包含下一个回路。用 K 表示对所有 n,在回路 $f_\lambda^{-n}(C)$上或内部的点组成的闭集。如果 $z\in C\setminus K$,经某些次迭代,$f_\lambda^n(C)$会在 C 外,因此 $f_\lambda^n(z)\to\infty$。即

$$A(\infty)=\{z:f_\lambda^k(z)\to\infty,\text{当 }k\to\infty\}=C\setminus K$$

由定理 4.1.3 知 J_λ 为$C\setminus K$ 的边界,也是 K 的边界。但 K 是一递减的闭的简单连通集(即连通的且有连通余集的集)序列的交,所以

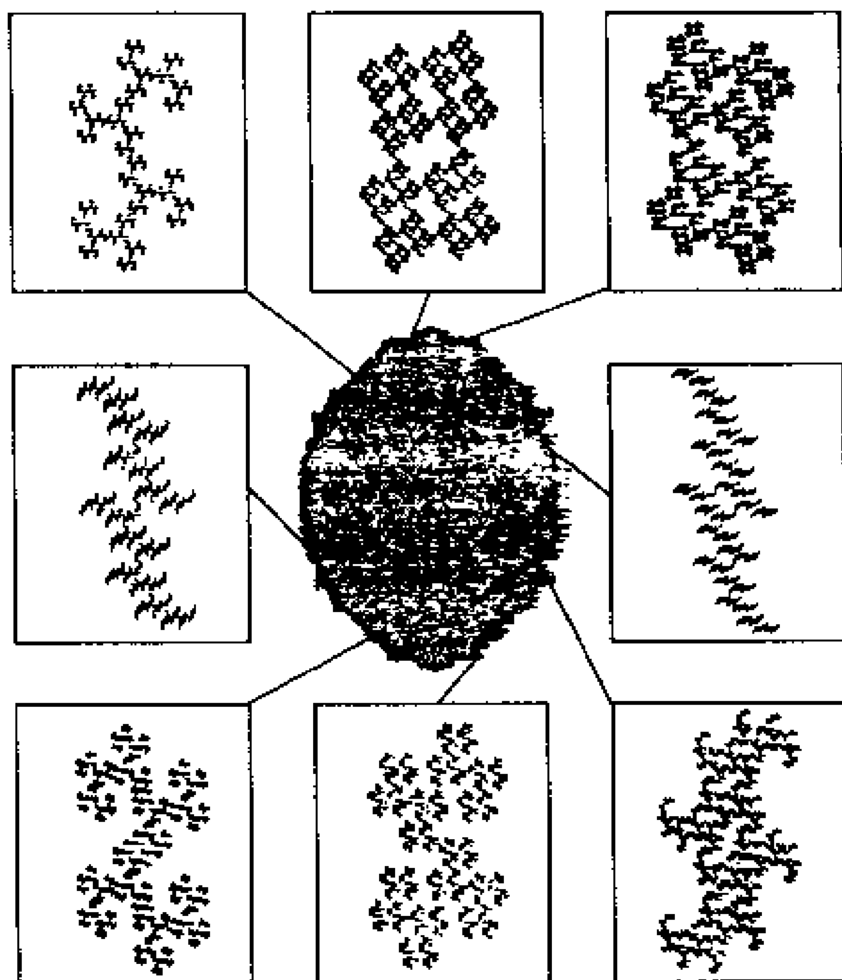


图 4.3.4　相应于 IFS$\{C;\lambda z-1,\lambda z+1\}$的 Mandelbrot 集及在 Mandelbrot 集边界局部上 λ 点对应的分形吸引子，注意局部边界与相应分形的相似性

由简单的拓扑结论，K 为简单连通集，因此有连通边界，即 J_λ 是连通的。

反之，如果$\{f_\lambda^n(0)\}$无界，设 C 为充分大的圆，使 $f_\lambda^{-1}(C)$在 C 内部，而使 C 外部所有的点迭代趋于∞；并使对于某 k，$f_\lambda^{k-1}(\lambda)=f_\lambda^k(0)$，且根据 n 小于或大于k 决定$f_\lambda^n(0)$在 C 内或C 外。像证明的前一部分一样，构造一系列回路$\{f_\lambda^{-n}(C)\}$，每一个回路的内部包含下一个回路。然而，当得到回路 $f_\lambda^{1-}(C)$，此时 $\lambda\in f_\lambda^{1-k}(C)$，由证明刚开始提到的(b)知，$f^{-k}(C)$是在回路 $f^{1-k}(C)$内的 8 字形图，f_λ 把$f^{-k}(C)$的每半部分的内部映射到 $f_\lambda^{1-k}(C)$的内部。由于其他点

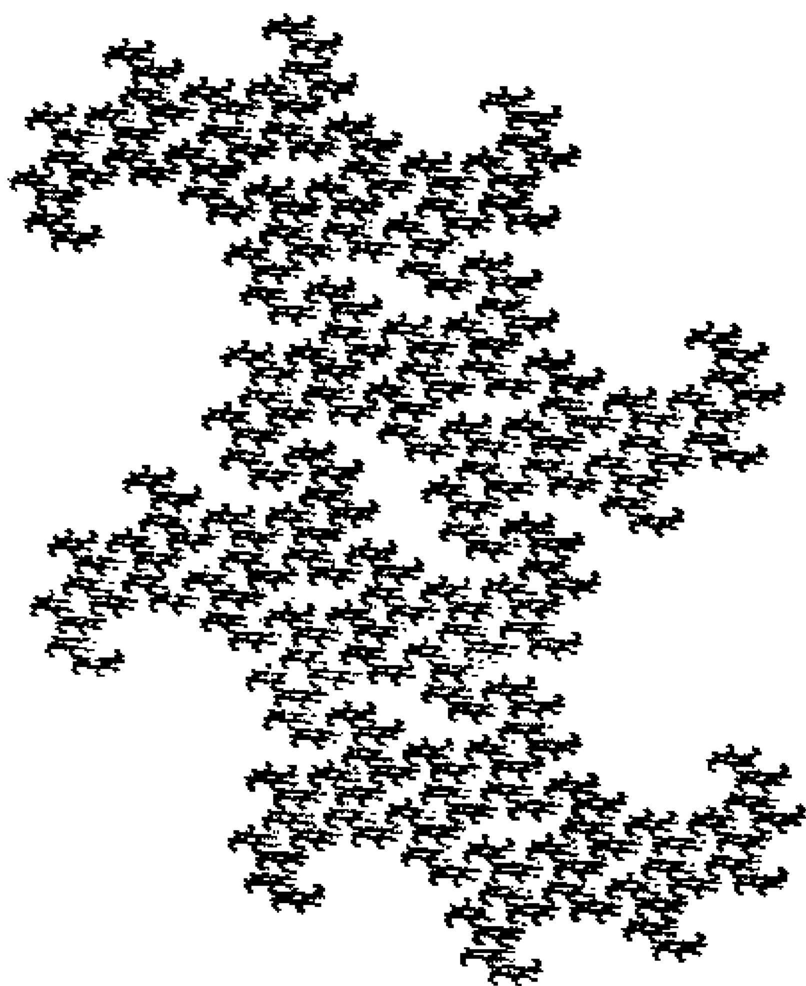


图 4.3.5　相应于图 4.3.3 半岛螺旋顶部 λ 值对应的

IFS$\{C, \lambda z+1, \lambda z-1\}$的分形吸引子

迭代趋于无穷，Julia 集一定在回路 $f^{-k}(C)$的内部，又由于 J_λ 在 f_λ^{-1} 下是不变的，所以它的每部分一定含于回路 $f_\lambda^{-k}(C)$的每一回路内部，于是这个 8 字形图 E 断开了 J_λ，J_λ 是不连通的。定理证毕。

这个 Mandelbrot 集的等价的定义，是第 5 章介绍的用逃逸时间算法绘制 Mandelbrot 集的计算机图像的理论基础。

下面讨论相对于动力系统族$\{\hat{C}, z^2-\lambda\}$的 Mandelbrot 集与相对于 IFS 族$\{\hat{C}: \sqrt{z+\lambda}, -\sqrt{z+\lambda}\}$的 Mandelbrot 集的关系，由定理 4.1.2 已知，对不同的 λ 值，可以把 IFS 修改成具有吸引子 J_λ 的双曲型的 IFS。因此我们可以设相应的 IFS 是具有吸引子 J_λ 的双曲型 IFS。

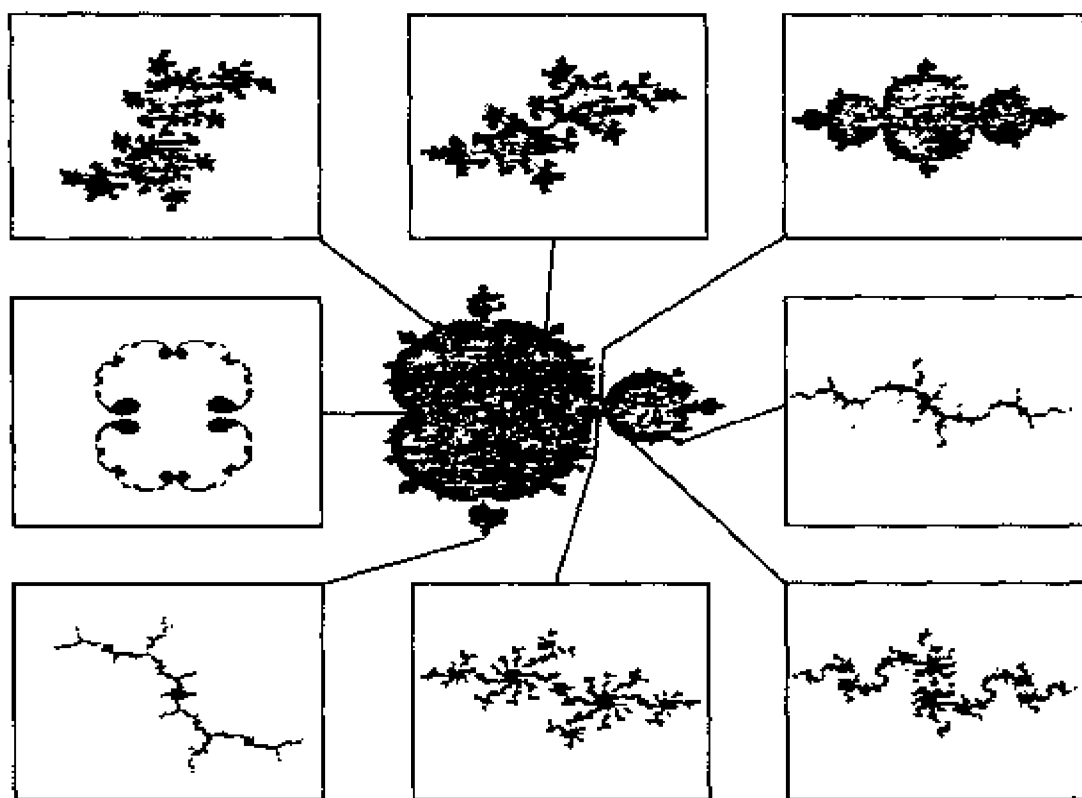


图 4.3.6 对应于 Mandelbrot 集中各种点 λ 的 Julia 集(或充满的 Julia 集),这里的 λ 主要取自边界局部,注意边界局部与相应 Julia 集的"族相似性"

由定理 4.3.1,IFS 的吸引子是连通的当且仅当 $w_1(J_\lambda)\cap w_2(J_\lambda)\neq\varnothing$,但 $w_1(C)\cap w_2(C)=\{0\}$,这就得出此 IFS 的吸引子是连通的,当且仅当原点 $0\in J_\lambda$,换句话说,如果我们用 IFS 的观点论述,正如可以利用 Julia 集理论证明的一样,都发现了同样的关于 J_λ 连通性的准则。

图 4.3.6 表示的是利用逃逸时间算法做出的动力系统族 $\{\hat{C}, f_\lambda(z)=z^2-\lambda\}$ 相应参数空间 P 上的 Mandelbrot 集,图中还标出了不同的 λ 点对应的分形 J_λ 的图。这里还应再次指出,$z^2-\lambda$ 对应的 Mandelbrot 集边界局部与其上 λ 值对应的 Julia 集十分相像,似乎 Mandelbrot 集的边界是由相对应的 Julia 集的微小片段编织起来的,即参数空间边界局部点对应的分形,与边界局部几何学之间存在着明显的"族相似性"。

仔细观察图 4.3.6,或者其他书上的二次函数的 Mandelbrot 集